Uma Apresentação de Teoria dos Modelos

Apresentamos algumas interlocuções entre a Lógica e a Matemática contemporâneas. As ferramentas discutidas lançam uma nova luz, mais geral e unificadora, sobre as construções habituais. Elas constituem campos de estudo tanto em si, como para os pesquisadores em todas as áreas.

Sugestões são bem-vindas, mande-as para: vinicius@ufabc.edu.br

O que usaremos da Lógica Matemática

Faremos uso de uma percepção fundamental:

> *A própria escrita da Matemática pode ser vista como um objeto matemático e estudada e utilizada como tal.*

Mais especificamente, trataremos as *propriedades*, chamadas *fórmulas* na terminologia técnica, como objetos.

Primeiramente, no plano euclidiano π, se $\phi(x), \psi(x)$ são propriedades que um ponto x pode ou não ter, então elas definem *lugares geométricos*

$$A = \{ x \in \pi \mid \phi(x) \} \quad \text{e} \quad B = \{ x \in \pi \mid \psi(x) \}$$

de modo que:

- $A \cup B = \{ x \in \pi \mid \phi(x) \vee \psi(x) \}$;
- $A \cap B = \{ x \in \pi \mid \phi(x) \wedge \psi(x) \}$;
- $A \times B = \{ (x, y) \in \pi^2 \mid \phi(x) \wedge \psi(y) \}$.

Em geral, dizemos que A, B são *conjuntos definíveis.*

O modo como as fórmulas são definidas impacta seu próprio comportamento, então isso precisa ser explicitado:

- lógicas com ou sem quantificadores, limitados ou não,
- de primeira ordem ou de ordem superior,
- finitárias ou não...

Usaremos a *lógica clássica de primeira ordem* e focaremos na *teoria dos modelos* dessa lógica.

Atenção

- "Teoria dos Modelos" não é modelagem matemática!
- Para trabalhar a teoria propriamente, são necessários mais conhecimentos de Lógica e Teoria dos Conjuntos e do campo de interesse.
- Os teoremas utilizados aqui e a aplicação dos paradigmas discutidos não são trivialidades.
- Porém, esse estudo pode ser conduzido naturalmente ao longo de toda a formação acadêmica.

Então, vamos começar!...

Paralelo com a Geometria Algébrica

Como usual, seja k um corpo algebricamente fechado.

Trabalharemos no espaço afim $\mathbb{A}^n$ (que é k^n).

Então, aprendemos que:

- $\{\, (x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid 3x^2 - 8y^3 + 2x^5 y = 0 \,\}$ é uma *curva;*
- $\mathbb{A}^n$ tem a *topologia de Zariski* cujos fechados são

$$Z(S) = \{\, x \in \mathbb{A}^n \mid (\forall f \in S)\, f(x) = 0 \,\},\ \ S \subseteq k[t_1, \ldots, t_n];$$

- com ela, $\mathbb{A}^n$ é compacto, mas não Hausdorff;

- $\mathbb{A}^n$ pode ser generalizado via

$$\mathrm{Sp}_n = \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_n]) = \{\,\text{ideais primos de } k[t_1, \ldots, t_n]\,\}$$

  com fechados

$$V(I) = \{\, P \in \mathrm{Sp}_n \mid I \subseteq P \,\},\ I \text{ ideal de } k[t_1, \ldots, t_n];$$

- Sp_n é compacto, mas não Hausdorff;
- e a história continua...

Esse desenvolvimento pode ser relido com as ferramentas da Lógica...

Primeiro, $\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid 3x^2 - 8y^3 + 2x^5y = 0\}$ é um lugar geométrico (conjunto definível)

$$\{(x, y) \in k^2 \mid \phi(x, y)\}.$$

Afinal, é isso que se espera de uma curva.

Porém, haveria conjuntos definíveis que escapam ao interesse da Geometria Algébrica?

Não: os conjuntos definíveis são justamente os construtíveis (combinações booleanas de fechados).

De fato:

Tarski Na linguagem dos anéis e para um corpo algebricamente fechado, toda ϕ pode ser reescrita sem quantificadores.

Esse enunciado, por sua vez, corresponde a:

Chevalley Projeções de conjuntos construtíveis são construtíveis.

Agora, vamos generalizar Sp_n:

(1º) As classes de equivalência das fórmulas com variáveis livres t_1, $\ldots$, t_n constituem uma álgebra de Boole B_n, que corresponde à dos definíveis em k^n.

(2º) Os ultrafiltros de B_n são identificados com os *n-tipos* (*completos*), isto é, os conjuntos dessas fórmulas simultaneamente consistentes e completos (maximais).

(3º) O espaço desses tipos é S_n (ou seja, o espaço de Stone de B_n).

(4º) A topologia (devida a Stone) de S_n tem uma base de abertos-fechados da forma

$$O(\phi) = \{\, p \in S_n \mid \phi \in p \,\}.$$

S_n é interessante porque...

- é compacto *e* Hausdorff;
- está definido para muitas outras teorias, afora a Geometria Algébrica.

Na Geometria Algébrica Real

Ao permitirmos a ordem na linguagem, entramos no campo dos corpos real-fechados e dos conjuntos semialgébricos:

- Há eliminação de quantificadores, também de Tarski, que corresponde ao Teorema de Seidenberg.
- A teoria é *ordem-minimal:* todos os definíveis na reta são uniões finitárias de intervalos.

  Algumas expansões mais ricas da linguagem também são o-minimais, outras não, outras ainda em aberto.
- Isso restringe os conjuntos definíveis no plano e no espaço, pelas projeções: são decomponíveis em células...

Limitantes uniformes

O fato do espaço de Stone ser compacto tem uma importante reformulação:

> *Se $\phi \leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \phi_i$, então $\phi \leftrightarrow (\phi_{i_1} \vee \ldots \vee \phi_{i_n})$ para algum n finito e $i_1, \ldots, i_n \in I$.*

Por exemplo, depois de algumas passagens:

De Bruijn–Erdős Se todos os subgrafos finitos de um grafo G são k-cromáticos, então G todo é k-cromático.

Cuidados com o enunciado

- Neste momento, $\bigvee_{i \in I} \phi_i$ é uma abreviatura, não uma fórmula.
- Ademais, como cada fórmula define um conjunto, isso significa que lugares geométricos são compactos (na topologia de Stone, não necessariamente na euclidiana).

  Porém, um círculo é uma união de pontos, cada qual também é um lugar geométrico:

  $$(3, 5) \text{ é definido por } \phi(x, y)\colon (x = 3) \wedge (y = 5),$$

  mas o círculo não é uma união de um número finito de pontos...

  E agora?

Não esqueça que a linguagem precisa ser bem determinada. O ponto acima só foi definido porque suas coordenadas foram usadas como parâmetros.

O conjunto índice I em $\phi \leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \phi_i$ não pode depender do universo de pontos: deve ser o mesmo onde quer que leiamos a equivalência.

Nosso interesse está em dois enunciados da introdução de Dries; Schmidt (1984):

Primeiro, suponha que F é um corpo qualquer e

$$f, f_1, \ldots, f_m \in F[t_1, \ldots, t_n]$$

com todos os graus limitados por d.

Se $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, então $f = h_1 f_1 + \ldots + h_m f_m$ para alguns h_i em $F[t_1, \ldots, t_n]$, por definição.

Os h_i podem ser tomados com grau limitado por algum N que, em princípio, dependeria de m, n, f, f_i e o próprio F...

... mas depende apenas de d e n: $N = N(d, n)$.

Suponha agora

$$g, h, f_1, \ldots, f_m \in F[t_1, \ldots, t_n]$$
$$\text{com todos } \mathrm{grau}(f_i) \leqslant d.$$

Também existe um limitante L *de modo que* $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ *é primo (ou todo o anel) se já acontece que,*

$$\textit{para } \mathrm{grau}(g), \mathrm{grau}(h) \leqslant L,$$
$$gh \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \textit{ implica}$$
$$g \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \textit{ ou } h \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle.$$

Novamente, L poderia depender de m, n, f_i e o próprio F...

... mas depende apenas de d *e* n*:* $L = L(d, n)$*.*

Um formalismo para a Análise

No início do Cálculo, várias deduções faziam uso de infinitésimos e grandezas infinitamente grandes.

- Isso não era uma novidade *per se*, porque os números (racionais, negativos, reais, complexos) foram aceitos e compreendidos aos poucos...
- ... mas a axiomática dos infinitésimos era mais difícil de (1) formular e (2) realizar.

Aos poucos, toda a Análise foi formalizada dentro de $\mathbb{R}$, sem recurso a esses novos números.

Enquanto a Análise era sistematizada assim, a Álgebra passou a considerar novas estruturas. Desse modo, é perfeitamente natural falar de um *corpo não arquimediano.*

Exemplo

No corpo $\mathbb{R}(t)$ das funções racionais, impor

$$t > a \text{ para todo } a \in \mathbb{R}$$

define uma única ordem...

- compatível com as operações do corpo;
- que estende a ordem natural em $\mathbb{R}$.

Essa ordem é chamada "que manda t ao infinito" e transforma $1/t$ em um infinitésimo (verifique).

Não é possível construir o Cálculo a partir de $\mathbb{R}(t)$, porque este corpo não é extensão elementar de $\mathbb{R}$ (como definiremos a seguir).

Porém, isso indica que a Matemática contemporânea permite "formular e realizar" uma Análise *Não Padrão* rigorosamente.

Abraham Robinson construiu essa formulação, encapsulando todo o ferramental necessário e a *superestrutura* dentro da teoria.

> *Aqui, usaremos um "atalho": especificamos a linguagem de antemão, identificando todas as operações, funções, relações e "objetos" de que precisaremos.*

A partir da estrutura base A ($\mathbb{R}$ com as interpretações naturais de todos os "objetos"), construímos uma *extensão elementar* A^*...

> *A^* inclui A e, para qualquer fórmula ϕ na linguagem especificada e parâmetros $a, b, \ldots$ em A,*
>
> $\phi(a, b, \ldots)$ *em* A^* *se e somente se* $\phi(a, b, \ldots)$ *em* A.

... com a saturação (isto é, a capacidade de resolver sistemas infinitos de propriedades) desejada ou outras metapropriedades.

(*Obs.: escrevemos X^* em vez de $^*X$ que é tradicional na formulação robinsoniana.*)

Agora, em $\mathbb{R}$, sabemos que o sistema abaixo é finitamente possível, isto é, qualquer subsistema finito é possível:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x > 3 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Se $\mathbb{R}^*$ resolver sistemas enumeráveis finitamente possíveis, como esse, então conterá "grandezas infinitamente grandes".

(*Logo, o Axioma do Supremo não é exprimível na linguagem dada.*)

Aplicação em Álgebra

Considere o grupo aditivo $(\mathbb{Q}, 0, +, -)$:

- é divisível, isto é, $(\forall a \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{N}^{\neq 0})(\exists b \in \mathbb{Q})\ n \cdot b = a$;
- *não* é finitamente gerado;
- mas todo conjunto finito de elementos tem um gerador comum:

$$\frac{1}{q_1 \ldots q_n} \text{ gera } \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}.$$

Suponha que precisemos de um "gerador" para todo $\mathbb{Q}$...

Conseguiremos um assim:

(1º) Tome uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m \mid f(n)$ para todos $n \geqslant m > 0$. Podem ser: $f(n) = n!$, $f(n) = \mathrm{mmc}(1, \dots, n)$ etc.

(2º) Na linguagem, inclua $\mathbb{N}$ (mais geral, embora $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$), sua ação sobre $\mathbb{Q}$ e f, assim: $A = (\mathbb{Q}, 0, +, -, \mathbb{N}, \cdot, f)$.

(3º) Obtenha $A^* = (\mathbb{Q}^*, 0^*, +^*, -^*, \mathbb{N}^*, \cdot^*, f^*)$.

(4º) Tome $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$: mostra-se que $N > q$ para todo $q \in \mathbb{N}$, logo, podemos calcular $f^*(N)/q$ em $\mathbb{N}^*$.

(5º) Tome $\dfrac{1}{f^*(N)}$ em $\mathbb{Q}^*$: esse será nosso "gerador".

De fato, dados $p, q \in \mathbb{N}^{\neq 0}$, tome $K = p\, f^*(N)/q$ em $\mathbb{N}^*$.

$$\textit{Então } K \cdot^* \frac{1}{f^*(N)} = \frac{p}{q}.$$

Referências

BOUSCAREN, E. (Ed.). *Model theory and algebraic geometry.* 2. imp. Springer, 1999.

DAVIS, M. *Applied nonstandard analysis.* Dover, 2005.

VAN DEN DRIES, L.; SCHMIDT, K. Bounds in the theory of polynomial rings over fields. *Inventiones mathematicae,* n. 76, p. 77–91, 1984.

VAN DEN DRIES, L. *Tame topology and o-minimal structures.* Cambridge University Press, 1998.

HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry.* 3. imp. Springer, 1983.

PRESTEL, A. *Model theory for the real algebraic geometer.* Istituti editoriali e poligrafici internazionale, 1998.