

Nome completo legível

Número RA

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| Resolução e pontuação | _____ |
|-----------------------|-------|

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Calcule a derivada parcial de  $x^2y - 3x^y$  com respeito a  $x$ .

$$2xy - 3x^{y-1}y$$

(a) Calcule  $\frac{\partial}{\partial r}(r^2s^2 \cos(rs))$ . (1pto)

$$2rs^2 \cos(rs) - r^2s^2 \sin(rs)$$

(b) Calcule  $\int_0^N \int_0^{Ks} 36r \, dr \, ds$ . (1pto)

$$6K^2N^3$$

(c) Dê a definição por limite da derivada direcional da função  $B$  no ponto  $W$  na direção do vetor unitário  $Z$ . (1pto)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (B(W + hZ) - B(W))$$

(d) Determine a equação da reta tangente a  $\gamma(t) = (3t, 5 - t^2)$  em  $(6, 1)$ . (1pto)

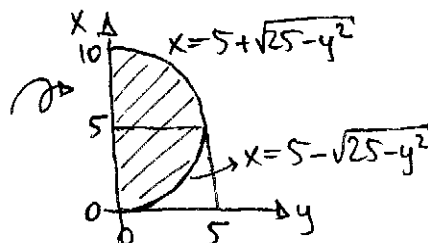
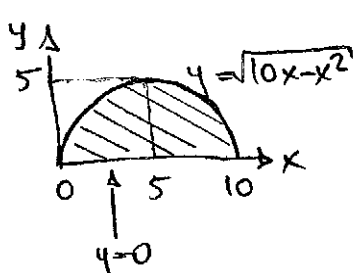
$$(x, y) = (6, 1) + \lambda(3, -4) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

N.B.: b)  $\int_0^N [18r^2]_{r=0}^{r=Ks} ds = \int_0^N 18K^2s^2 ds = [6K^2s^3]_{s=0}^{s=N}$ .

d)  $\gamma(t) = (3t, 5 - t^2) = (6, 1) \Rightarrow t = 2$   
 $\gamma'(t) = (3, -2t) \Rightarrow \gamma'(2) = (3, -4)$

(2) Mude a ordem de integração de  $\int_0^{10} \int_0^{\sqrt{10x-x^2}} f(x,y) dy dx$ . (2pts)

De  $y = \sqrt{10x-x^2}$  vem  $x^2 - 10x + y^2 = 0$  (note que é  $(x-5)^2 + y^2 = 25$ , arco de círculo de raio 5 e centro  $(5,0)$ ), então  $x = 5 \pm \sqrt{25-y^2}$ . (1pto) (limites)



$$\rightarrow \int_0^5 \int_{5-\sqrt{25-y^2}}^{5+\sqrt{25-y^2}} f(x,y) dx dy$$

(1pto) (procedimento e resposta)

(3) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  para  $f(x,y) = (5x^3 + 6xy^2)^{1/3}$  usando limite. (2pts)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5h^3 + 6h \cdot 0)^{1/3} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{5} \cdot \frac{h}{h} = \sqrt[3]{5}. \quad (1pto) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot h^2)^{1/3} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \quad (1pto) \end{aligned}$$

(4) Sabe-se que  $f(x,y,z)$  é diferenciável e  $\nabla f(x,y,z) = (3x - z, -\ln y, 2z + \pi)$ . Sendo  $H(t) = f(t^4, e^{2t}, \ln t)$ , calcule  $H'(1)$ . (2pts)

Com  $\gamma(t) = (t^4, e^{2t}, \ln t)$  diferenciável, vem  $H'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$  (1pto) (cadeia), então  $H'(t) = \langle (3t^4 - \ln t, -\ln e^{2t}, 2\ln t + \pi) | (4t^3, 2e^{2t}, 1/t) \rangle = (3t^4 - \ln t) \cdot 4t^3 - 2t \cdot 2e^{2t} + (2\ln t + \pi)/t$ .

Então  $H'(1) = 12 - 4e^2 + \pi$ . (1pto) (substituições e cálculo)

Sol:  $t=1 \Rightarrow x=t^4=1, y=e^{2t}=e^2, z=\ln t=0 \Rightarrow \nabla f=(3,-2,\pi)$  e  $\gamma'=(4,2e^2,1)$ .