Introdução às EDO – BCN 0405 – 2º quad. 2025 – Prof. Vinicius Cifú Lopes
Segunda Prova – **Versão X** – 19 ago. 2025

Nome completo legível	**Número RA**
Resolução e pontuação	——

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Resolva a equação $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$$

(a) Resolva a equação $y'' + 2y' + 8y = 0$. (1pto) → aviso em sala

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} \cos(\sqrt{7}\,x) + C_2 e^{-x} \operatorname{sen}(\sqrt{7}\,x)}$$

(b) Determine a solução de $y'' - 3xy' + 6y = 0$ da forma $x^2 + Ax + B$. (1pto)

$$\boxed{y = x^2 - \frac{1}{3}}$$

(c) Determine os equilíbrios de $\begin{cases} x' = 2xy - 7x \\ y' = 5y + 3xy \end{cases}$ (não os classifique). (1pto)

$$\boxed{(0,0) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{2}\right)}$$

(d) Determine ω para que uma força externa $\cos \omega t$ cause ressonância em um sistema massa–mola horizontal não amortecido com massa γ e constante elástica δ. (1pto)

$$\boxed{\omega = \sqrt{\delta/\gamma}}$$

Cálculos: (a) $P(t) = t^2 + 2t + 8 \Rightarrow$ raízes $-1 \pm \sqrt{7}\,i$. (b) $y = x^2 + Ax + B \Rightarrow y' = 2x + A \Rightarrow y'' = 2 \Rightarrow 2 - 3x(2x + A) + 6(x^2 + Ax + B) = 0 \Rightarrow 0x^2 + 3Ax + (6B + 2) = 0 \Rightarrow A = 0,\ B = -1/3$. (c) $\begin{cases} x(2y-7) = 0 \\ y(5+3x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 7/2 \\ y = 0 \text{ ou } x = -5/3 \end{cases}$. (d) $\gamma x'' + \delta x = \cos \omega t \Rightarrow P(u) = \gamma u^2 + \delta \Rightarrow$ raízes $\pm\sqrt{\delta/\gamma}\,i \Rightarrow x_h = A\cos(\sqrt{\delta/\gamma}\,t - \theta)$.

(2) Resolva o PVI $x^2y'' - 6xy' + 12y = x^5$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$ (atenção: equação de Euler e método de Lagrange da variação das constantes). (3pts)

Euler: $P(t) = 1t^2 + (-6-1)t + 12 \Rightarrow$ raízes 3 e $4 \Rightarrow y_1 = x^3$ e $y_2 = x^4$ (1pto)

Lagrange: $W = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6 \Rightarrow C_1 = -\int \frac{y_2 R}{pW}\,dx = -\int \frac{x^4 \cdot x^5}{x^2 \cdot x^6}\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2}$

e $C_2 = \int \frac{y_1 R}{pW}\,dx = \int \frac{x^3 \cdot x^5}{x^2 \cdot x^6}\,dx = \int 1\,dx = x \Rightarrow y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 = -\frac{x^2}{2} \cdot x^3 +$

$+ x \cdot x^4 = \frac{x^5}{2} \Rightarrow y = D_1 x^3 + D_2 x^4 + \frac{x^5}{2}$ (1pto)

$y(1) = 1 \Rightarrow D_1 + D_2 + \frac{1}{2} = 1$ e $y'(1) = 4$ com $y' = 3D_1x^2 + 4D_2x^3 + \frac{5x^4}{2}$

$\Rightarrow 3D_1 + 4D_2 + \frac{5}{2} = 4 \Rightarrow \begin{cases} D_1 + D_2 = 1/2 \\ 3D_1 + 4D_2 = 3/2 \end{cases} \Rightarrow D_1 = 1/2$ e $D_2 = 0 \Rightarrow y =$

$= \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2}$ (1pto)

(3) Resolva o sistema $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ e classifique seu equilíbrio na origem. (3pts)

$\underbrace{y = 2x - x'}_{\text{(1ª eq.)}} \Rightarrow y'' = 2x' - x'' \Rightarrow 2x' - x'' = 2x + 4(2x - x')$ (2ª eq.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x'' - 6x' + 10x = 0 \Rightarrow P(u) = u^2 - 6u + 10 \Rightarrow$ raízes $3 \pm i \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_1 e^{3t} \cos t + C_2 e^{3t} \operatorname{sen} t$ (1pto)

$\Rightarrow y = 2x - x' = 2C_1 e^{3t} \cos t + 2C_2 e^{3t} \operatorname{sen} t - C_1 \cdot e^{3t} \cdot 3 \cos t + C_1 e^{3t} \operatorname{sen} t$

$- C_2 e^{3t} \cdot 3 \operatorname{sen} t - C_2 e^{3t} \cos t = (-C_1 - C_2) e^{3t} \cos t + (C_1 - C_2) e^{3t} \operatorname{sen} t$

(1pto)

Raízes com $3 > 0$ e $i \neq 0 \Rightarrow$ espiral repulsor (1pto)