Introdução às EDO – BCN 0405 – 2º quad. 2025 – Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 10 jul. 2025

Nome completo legível	**Número RA**
Resolução e pontuação	———

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Resolva a equação $y' = -5y$.

$$\boxed{y = Ce^{-5x}}$$

(a) Resolva o PVI $xy' = 6y$, $y(1) = 4\pi$. (1pto)

$$\boxed{y = 4\pi x^6}$$

(b) Identifique um fator que, multiplicando a equação $8x^{10}y^4dx + 4x^{11}y^3dy = 0$, torne-a exata. (Não a resolva.) (1pto)

$$\boxed{\mu = x^{-3}}$$

(c) Identifique a para que a equação $x^a y^2 dx = (x^2y^4 + x^3y^3)\,dy$ seja homogênea. (Não a resolva.) (1pto)

$$\boxed{a = 4}$$

(d) Determine o valor de f no ponto de inflexão, sabendo que $f' = af\cdot(M-3f)$ e que $0 < f < M/3$ (as letras a, M são constantes). (1pto)

$$\boxed{f = M/6}$$

Cálculos: (a) $dy/y = 6dx/x \Rightarrow \ln|y| = 6\ln|x| + C_1 = \ln x^6 + C_1 \Rightarrow y = Cx^6$

$\Rightarrow 4\pi = C.1^6 \Rightarrow C = 4\pi \Rightarrow y = 4\pi x^6$.

(b) $M = 8x^{10}y^4$ e $N = 4x^{11}y^3 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \dfrac{32x^{10}y^3 - 44x^{10}y^3}{4x^{11}y^3} = -3x^{-1}$

$\Rightarrow \mu = \exp\left(\int \varphi\, dx\right) = \exp(-3\ln x) = x^{-3}$.

(c) $a+2 = 2+4 = 3+3 \Rightarrow a = 4$.

(d) $f'' = (af\cdot(M-3f))' = af'\cdot(M-3f) + af\cdot(0-3f') = a(M-6f)\cdot f' =$

$= a(M-6f)\cdot af\cdot(M-3f) = 0 \Leftrightarrow f=0$ ou $f = M/3$ ou $f = M/6$, mas $0 < f < M/3$.

(2) Resolva a equação $y' = 7y - 12e^{3x}$ pelo método da variação da constante. (2pts)

Parte homogênea: $y' = 7y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 7\,dx \Rightarrow \ln|y| = 7x + C_1 \Rightarrow y = Ce^{7x}$ (1pto)

Variação da constante: $y' = C'e^{7x} + C e^{7x} \cdot 7 = 7\overbrace{Ce^{7x}}^{y} - 12e^{3x} \Rightarrow$

$\Rightarrow C'e^{7x} = -12e^{3x} \Rightarrow C' = -12e^{-4x} \Rightarrow C = -\int 12e^{-4x}\,dx = 3e^{-4x} + D$

$\Rightarrow y = Ce^{7x} = De^{7x} + 3e^{3x}$. (1pto)

(3) Determine e classifique os equilíbrios da equação $y' = (y-1)^2(3-y)$. (Não a resolva.) (2pts)

$y' = (y-1)^2(3-y) = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 3$ (1pto)

y	$(y-1)^2$	$(3-y)$	y'	y	
	+	−	−	↘	
3					estável
	+	+	+	↗	
1					semiestável
	+	+	+	↗	

(1pto)

(4) Uma grandeza $x(t)$ satisfaz as condições $x' = Kt/(\cos x - e^x)$, sendo K constante, $x(0) = 4\pi$ e $x(2) = 0$. Determine t para o qual $x(t) = 2\pi$. (Sugestão: trabalhe com a solução implícita da equação.) (2pts)

$(\cos x - e^x)\,dx = Kt\,dt \Rightarrow \operatorname{sen} x - e^x = Kt^2/2 + C$

$x(0) = 4\pi \Rightarrow \operatorname{sen} 4\pi - e^{4\pi} = K\cdot 0^2/2 + C \Rightarrow C = -e^{4\pi}$

$x(2) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 0 - e^0 = K\cdot 2^2/2 - e^{4\pi} \Rightarrow K = \frac{e^{4\pi}-1}{2}$. (1pto)

$x(t) = 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen} 2\pi - e^{2\pi} = \frac{e^{4\pi}-1}{2}\,\frac{t^2}{2} - e^{4\pi} \Rightarrow 4\left(e^{4\pi} - e^{2\pi}\right) = \left(e^{4\pi}-1\right)\cdot t^2$

$\Rightarrow t = (\pm)\cdot 2\sqrt{\frac{e^{4\pi} - e^{2\pi}}{e^{4\pi}-1}}$ (1pto)