Introdução às EDO – BCN 0405 – 2º quad. 2025 – Prof. Vinicius Cifú Lopes
Primeira Prova – Versão X – 10 jul. 2025

| **Nome completo legível** | **Número RA** |
|---|---|
| Resolução e pontuação | —— |

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as respostas finais. O primeiro item está resolvido como exemplo.

Ex.: Resolva a equação $y' = -5y$.

$$y = Ce^{-5x}$$

(a) Resolva o PVI $xy' = 8y$, $y(1) = 2\pi$. (1pto)

$$y = 2\pi x^8$$

(b) Identifique $a$ para que a equação $(x^5y^2 + x^4y^3)dx = x^a y\, dy$ seja homogênea. (Não a resolva.) (1pto)

$$a = 6$$

(c) Identifique um fator que, multiplicando a equação $8x^9y^3dx + 3x^{10}y^2dy = 0$, torne-a exata. (Não a resolva.) (1pto)

$$\mu = x^{-2}$$

(d) Determine o valor de $f$ no ponto de inflexão, sabendo que $f' = af \cdot (M - 2f)$ e que $0 < f < M/2$ (as letras $a, M$ são constantes). (1pto)

$$f = M/4$$

Cálculos: (a) $dy/y = 8dx/x \Rightarrow \ln|y| = 8\ln|x| + C_1 = \ln x^8 + C_1 \Rightarrow y = Cx^8$
$\Rightarrow 2\pi = C.1^8 \Rightarrow C = 2\pi \Rightarrow y = 2\pi x^8$.

(b) $5+2 = 4+3 = a+1 \Rightarrow a = 6$.

(c) $M = 8x^9y^3$ e $N = 3x^{10}y^2 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \dfrac{24x^9y^2 - 30x^9y^2}{3x^{10}y^2} = -2x^{-1}$
$\Rightarrow \mu = \exp\left(\int \varphi\, dx\right) = \exp(-2\ln x) = x^{-2}$.

(d) $f'' = (af\cdot(M-2f))' = af'\cdot(M-2f) + af\cdot(0-2f') = a(M-4f).f' =$
$= a(M-4f).af(M-2f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ou $f = M/2$ ou $f = M/4$, mas $0 < f < M/2$.

(2) Resolva a equação $y' = 5y + 12e^{2x}$ pelo método da variação da constante. (2pts)

Parte homogênea: $y' = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5\,dx \Rightarrow \ln|y| = 5x + C_1 \Rightarrow y = Ce^{5x}$ (1pto)

Variação da constante: $y' = C'e^{5x} + C.e^{5x}.5 = 5\overbrace{Ce^{5x}}^{y} + 12e^{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow C'e^{5x} = 12e^{2x} \Rightarrow C' = 12e^{-3x} \Rightarrow C = \int 12e^{-3x}\,dx = -4e^{-3x} + D$

$\Rightarrow y = Ce^{5x} = De^{5x} - 4e^{2x}$. (1pto)

(3) Determine e classifique os equilíbrios da equação $y' = (y-1)(y-2)^2$. (Não a resolva.) (2pts)

$y' = (y-1)(y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$. (1pto)

| $y$ | $y-1$ | $(y-2)^2$ | $y'$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| | + | + | + | $\nearrow$ |
| 2 | | | | semiestável |
| | + | + | + | $\nearrow$ |
| 1 | | | | instável |
| | − | + | − | $\searrow$ |

(1pto)

(4) Uma grandeza $x(t)$ satisfaz as condições $x' = Kt/(\operatorname{sen} x + e^x)$, sendo $K$ constante, $x(0) = 4\pi$ e $x(2) = 0$. Determine $t$ para o qual $x(t) = 2\pi$. (Sugestão: trabalhe com a solução implícita da equação.) (2pts)

$(\operatorname{sen} x + e^x)\,dx = Kt\,dt \Rightarrow -\cos x + e^x = Kt^2/2 + C$

$x(0) = 4\pi \Rightarrow -\cos 4\pi + e^{4\pi} = K.0^2/2 + C \Rightarrow C = e^{4\pi} - 1$

$x(2) = 0 \Rightarrow -\cos 0 + e^0 = K.2^2/2 + e^{4\pi} - 1 \Rightarrow K = \frac{1-e^{4\pi}}{2}$ (1pto)

$x(t) = 2\pi \Rightarrow -\cos 2\pi + e^{2\pi} = \frac{1-e^{4\pi}}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + e^{4\pi} - 1 \Rightarrow 4(e^{2\pi} - e^{4\pi}) = (1-e^{4\pi})t^2$

$\Rightarrow t = (\pm)\, 2 \cdot \sqrt{\frac{e^{4\pi} - e^{2\pi}}{e^{4\pi} - 1}}$ (1pto)