Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
2º quad. 2024 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão X – 04 setembro 2024

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Em cada item, apresente apenas a classificação do ponto crítico com a matriz hessiana indicada. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Exemplo: $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ — **ponto de mínimo**

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$ — ponto de máximo (1pto)

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — multi-sela (1pto)

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ — ponto de mínimo (1pto)

(d) $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ — ponto de máximo (1pto)

a) Já diagonalizada, com todas as entradas negativas.

b) Subdeterminantes $D_1 = 1$, $D_2 = -8$, $D_3 = -8 \Rightarrow$ quocientes $+, -, +$.

c) Subdeterminantes $D_1 = 3$, $D_2 = 9$, $D_3 = 15 \Rightarrow$ quocientes $+, +, +$.

d) $\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 3 > 0$ com $-4 < 0$ (ou subdets $D_1 = -4$, $D_2 = 3 \Rightarrow$ quocientes $-, -$).

(2) Calcule $\operatorname{div} F$ para $F = (e^{2xy},\ 5x^2y^2z^2,\ 3xz - 8yz)$. (1pto)

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= e^{2xy} \cdot 2y + 10x^2yz^2 + (3x - 8y).$$

(3) Determine os pontos críticos de $f = (x^2 - x)(y^2 + y)$. (Não os classifique.) (2pts)

$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x-1)(y^2+y) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $y = 0$ ou $y = -1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-x)(2y+1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$ ou $y = -\frac{1}{2}$ (1pto)

Combinações: (a) $x = \frac{1}{2}$ e $x = 0$ ⊗ ; (b) $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$ ⊗ ; (c) $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; (d) $y = 0$ e $x = 0 \Rightarrow (0,0)$; (e) $y = 0$ e $x = 1 \Rightarrow (1,0)$; (f) $y = 0$ e $y = -\frac{1}{2}$ ⊗ ; (g) $y = -1$ e $x = 0 \Rightarrow (0,-1)$; (h) $y = -1$ e $x = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (1,-1)$; (i) $y = -1$ e $y = -\frac{1}{2}$ ⊗. (1pto)

(4) Determine o valor máximo de $f = x^2 + 9y^2$ sujeita a $4x^2 + y^2 = 16$ e estime o valor máximo da mesma f para o vínculo $4x^2 + y^2 = 19$. (3pts)

Por Lagrange: $\nabla f = (2x, 18y)$ e $\nabla g = (8x, 2y)$ $(g = 4x^2 + y^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 8x \\ 18y = \lambda 2y \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

(1pto) (Note $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 0 \neq 16$.)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } \lambda = 1/4 \\ y = 0 \text{ ou } \lambda = 9 \\ 4x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \text{casos: } \begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1/4 \Rightarrow \lambda \neq 9 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x = 0 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow \lambda = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ pontos críticos $(2,0), (-2,0), (0,4), (0,-4)$ com valores de f respectivamente: $4, 4, 144, 144 \Rightarrow$ máximo 144 (1pto)

O valor máximo corresponde aos pontos $(0, \pm 4)$ com $\lambda = 9$, então:

$\Delta V \approx \lambda \Delta C = 9 \cdot (19 - 16) = 27 \Rightarrow$ novo $V \approx 144 + 27 = 171$

(1pto)