Introdução às EDO – BCN 0405
3° quad. 2022 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – 07/12/2022

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y'' - 5y' + 6y = 0$.	$y(x) =$	$C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
(a) $y'' + 4y' + 4y = 0$.	$y(x) =$	$C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ (1pto)
(b) $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$ (equação de Euler).	$y(x) =$	$C_1 x^4 + C_2 x^{-1}$ (1pto)
(c) $y'' - y = e^{2x}$ (não esqueça y_p).	$y(x) =$	$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}$ (1pto)
(d) $(x-1)y'' + y = xy'$ (use $y_1 = e^x$).	$y(x) =$	$C_1 e^x + C_2 x$ (1pto)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição!)

(a) Polinômio característico $t^2 + 4t + 4 \Rightarrow$ raiz -2 dupla.

(b) Polinômio característico $t^2 + (-2-1)t - 4 \Rightarrow$ raízes 4 e -1.

(c) Parte homogênea: pol. caract. $t^2 - 1 \Rightarrow$ raízes 1 e $-1 \Rightarrow y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ $\Rightarrow$ membro direito e^{2x} não é solução da parte homogênea $\Rightarrow y_p = Ae^{2x}$ $\Rightarrow y_p' = 2Ae^{2x} \Rightarrow y_p'' = 4Ae^{2x} \Rightarrow$ substituindo na equação: $4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x}$ $\Rightarrow A = 1/3$ e $y = y_h + y_p$

(d) (Lista 3, ex. 16g.) Redução de ordem: $y = Cy_1 = Ce^x \Rightarrow y' = C'e^x + Ce^x$ $\Rightarrow y'' = C''e^x + 2C'e^x + Ce^x \Rightarrow$ substituindo na equação: $(x-1)(C'' + 2C' + C)e^x$ $+ Ce^x = x(C' + C)e^x \Rightarrow C''(x-1) + C'(x-2) = 0 \Rightarrow z' = -z(x-2)/(x-1) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{x-2}{x-1}dx = \left(-1 + \frac{1}{x-1}\right)dx \Rightarrow \ln|z| = -x + \ln|x-1| \Rightarrow z = (x-1)e^{-x} \Rightarrow C =$ $= \int z\,dx = -xe^{-x} \Rightarrow y_2 = Ce^x = -x$ (e o sinal pode absorver em C_2).

(2) Um sistema massa–mola obedece à equação $5x'' + 3x' + 4x = 2\cos 2t$ (todas as unidades no SI). Determine: (a) a massa e a constante elástica do sistema; (b) a solução da equação com a forma $A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$, por substituição. (3pts)

(a) Massa 5 kg e constante elástica 4 N/m. (1pto)

(b) Calculamos: $x = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t \Rightarrow x' = -2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t \Rightarrow x'' = -4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t$ (1pto).

Substituímos na equação: $5(-4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t) + 3(-2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t) + 4(A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t) = 2\cos 2t \Rightarrow (-16A + 6B)\cos 2t + (-6A - 16B)\,\text{sen}\,2t = 2\cos 2t \Rightarrow \begin{cases} -16A + 6B = 2 \\ -6A - 16B = 0 \end{cases}$ (1pto)

O sistema pode ser resolvido por eliminação ou Cramer: $A = -8/73$ e $B = 3/73$, donde $x = -\frac{8}{73}\cos 2t + \frac{3}{73}\,\text{sen}\,2t$. (A solução da parte homogênea / transiente vem com os coeficientes anulados. Essa é apenas uma solução particular e estacionária.)

(3) Assuma que y_1, y_2 são soluções de $y'' + 2xe^x y' = y\cos 5x$. Sem resolver essa equação, mostre que o wronskiano $W(y_1, y_2)$ é solução de $w' + 2xe^x w = 0$. (2pts)

Para $i = 1$ e 2, por substituição, $y_i'' + 2xe^x y_i' = y_i \cos 5x$. Mas $W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$, então $W' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'}$ (1pto). Substituindo: $W' + 2xe^x W = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + 2xe^x y_1 y_2' - 2xe^x y_1' y_2 = y_1(y_2'' + 2xe^x y_2') - y_2(y_1'' + 2xe^x y_1') = y_1(y_2\cos 5x) - y_2(y_1\cos 5x) = 0$ (1pto)

(Compare com a demonstração vista em aula.)

(4) Classifique o equilíbrio do sistema $X' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X$ na origem. (1pto)

(Lista 5, ex. 8a) Opção I: com $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, vem: $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x' + x}{2} \rightarrow \frac{x'' + x'}{2} = x \Rightarrow x'' + x' - 2x = 0 \Rightarrow$ pol. característico $u^2 + u - 2 \Rightarrow$ raízes -2 e 1 (sinais opostos) $\Rightarrow$ sela, instável.

Opção II: $\begin{vmatrix} -1-u & 2 \\ 1 & 0-u \end{vmatrix} = (-1-u)(-u) - 2 = u^2 + u - 2$ com raízes -2 e $1 \Rightarrow$ sela, instável.