Introdução às EDO – BCN 0405
3° quad. 2022 – Noturno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – 26/10/2022

Nome	**RA**
Resoluções e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações e os problemas de valor inicial, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y' = -5y$.	$y(x) =$	Ce^{-5x}
(a) $8y' + xy = 0$.	$y(x) =$	$C\exp(-x^2/16)$ (1pto)
(b) $-yy' = \text{sen}\, x$, $y(0) = -2$.	$y(x) =$	$-\sqrt{2\cos x + 2}$ (1pto)
(c) $y' = 2y - \ln(3x)$ (atenção: deixe a primitiva indicada).	$y(x) =$	$De^{2x} - e^{2x}\int e^{-2x}\ln(3x)\,dx$ (1pto)
(d) $xy' + 2y = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1/2$.	$y(x) =$	$\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12x^2}$ (1pto)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição!)

a) $8\,dy + xy\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{8} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{16} + C_1 \Rightarrow y = C\exp(-x^2/16)$.

b) (Lista 1, ex. 5c) $-y\,dy = \text{sen}\,x\,dx \Rightarrow -\frac{y^2}{2} = -\cos x + C_1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2\cos x + C}$
$\Rightarrow -2 = \pm\sqrt{2\cdot 1 + C} \Rightarrow 4 = 2 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y = -\sqrt{2\cos x + 2}$.

c) Parte homogênea: $y' = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\,dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C_1 \Rightarrow y = Ce^{2x}$.
Variação da constante: $C'e^{2x} + C\cdot e^{2x}\cdot 2 = 2Ce^{2x} - \ln(3x) \Rightarrow C' = -e^{-2x}\ln(3x)$
$\Rightarrow C = -\int e^{-2x}\ln(3x)\,dx + D$. Voltando: $y = Ce^{2x} = De^{2x} - e^{2x}\int e^{-2x}\ln(3x)\,dx$.

d) (Lista 1, ex. 7b) Parte homogênea: $xy' + 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y| =$
$= -2\ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx^{-2}$. Variação da constante: $x\left(C'x^{-2} + C(-2)x^{-3}\right) + 2Cx^{-2} =$
$= x^2 - x + 1 \Rightarrow C' = x^3 - x^2 + x \Rightarrow C = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + D$. Voltando: $y = Cx^{-2} = \frac{x^2}{4}$
$-\frac{x}{3} + \frac{1}{2} + Dx^{-2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + D \Rightarrow D = \frac{1}{12} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12x^2}$.

(2) Um tanque esvaziou em 28 minutos conforme a equação $h' = -M\sqrt{h}/(2h - h^2)$, sendo $h(t)$ o nível da água acima do ralo, em função do tempo, e M uma constante. O nível inicial da água era 1 m. Determine quando o nível chegou a (¼) m. (3pts)

I) $\frac{dh}{dt} = \frac{-M}{2h^{1/2} - h^{3/2}} \Rightarrow (2h^{1/2} - h^{3/2})\,dh = -M\,dt \Rightarrow \frac{4}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} = C - Mt$ (1pto)

II) $h(28) = 0 \Rightarrow 0 = C - M \cdot 28 \Rightarrow M = \frac{C}{28}$.

$h(0) = 1 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = C - 0 \Rightarrow C = \frac{14}{15} \Rightarrow M = \frac{1}{30}$.

$\therefore \frac{4}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} = \frac{14}{15} - \frac{t}{30}$. (1pto)

III) $h(t) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{32} = \frac{14}{15} - \frac{t}{30} \Rightarrow \frac{t}{30} = \frac{14}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 28 - 5 + \frac{3}{8} = 23 + \frac{3}{8}$ (minutos). (1pto)

(Compare com o exemplo visto em aula, pondo $M = A\sqrt{2g}/\pi$ e $R = 1$.)

(3) Determine e classifique os equilíbrios de $y' = y^3 - 4y$, sem a resolver. (2pts)

Equilíbrios: $y' = 0 \Leftrightarrow y^3 - 4y = 0 \Leftrightarrow y(y+2)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -2$ ou $y = 2$. (1pto)

y	$y+2$	$y-2$	y'	y
+	+	+	+	↗
+	+	−	−	↘
−	+	−	+	↗
−	−	−	−	↘

2 instável
0 estável
−2 instável

Análise de sinais (1pto)

(4) Mostre que a equação $y' = 40\,\mathrm{sen}\,x + 2yx^{-1} - 8y^2(\mathrm{sen}\,x)/5x^4$ torna-se linear, com incógnita z, por meio da substituição $y = 5x^2 + z^{-1}$. (Não a resolva.) (1pto)

$y = 5x^2 + z^{-1} \Rightarrow y' = 10x - z^{-2} \cdot z'$ (regra da cadeia).

$\therefore 10x - z^{-2}z' = 40\,\mathrm{sen}\,x + 2(5x^2 + z^{-1})x^{-1} - 8(5x^2 + z^{-1})^2(\mathrm{sen}\,x)/5x^4$

$\rightarrow \cancel{10x} - z^{-2}z' = \cancel{40\,\mathrm{sen}\,x} + \cancel{10x} + 2x^{-1}z^{-1} - \cancel{40\,\mathrm{sen}\,x} - 16x^{-2}z^{-1}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{8}{5}x^{-4}z^{-2} \cdot \mathrm{sen}\,x$

$\rightarrow -z^{-2}z' = 2x^{-1}z^{-1} - 16x^{-2}z^{-1}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{8}{5}x^{-4}z^{-2}\,\mathrm{sen}\,x$

$\rightarrow z' = (-2x^{-1} + 16x^{-2}\,\mathrm{sen}\,x)z + (\frac{8}{5}x^{-4}\,\mathrm{sen}\,x)$ (linear) (1pto)

(Equação de Riccati.)