Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2022 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão V – 23/08/2022

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y'' - 5y' + 6y = 0.$ $\quad y(x) = \boxed{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$

(a) $y'' + 8y' - 9y = 0.$ $\quad y(x) = \boxed{C_1 e^{-9x} + C_2 e^{x}}$ (1pto)

(b) $4y'' + 12y' + 9y = 0.$ $\quad y(x) = \boxed{C_1 e^{-3x/2} + C_2 x e^{-3x/2}}$ (1pto)

(c) $y'' + 4y = x.$
(não esqueça y_p) $\quad y(x) = \boxed{C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{4}}$ (1pto)

(d) $xy'' + (x-1)y$
$= (2x-1)y'.$
(use $y_1 = e^x$) $\quad y(x) = \boxed{C_1 e^{x} + C_2 e^{x} \ln|x|}$ (1pto)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição!)

(a) (Lista 3, ex. 10g) Pol. característico $t^2+8t-9 \Rightarrow$ raízes -9 e 1. (b) (Lista 3, ex 10 d). Pol. característico $4t^2+12t+9 \Rightarrow$ raiz $-3/2$ dupla. (c) (Lista 4, ex 3a) Pol. característico $t^2+4 \Rightarrow$ raízes $\pm 2i \Rightarrow y_1 = \cos 2x$ e $y_2 = \operatorname{sen} 2x$. Coeficientes indeterminados: $R = x^1$ forma $0+0i$ que não é raiz do poli. característico, então $y_p = Ax^1+B \Rightarrow y_p' = A \Rightarrow y_p'' = 0 \Rightarrow$ na equação: $0+4(Ax+B) = x \Rightarrow 4A = 1$ e $B = 0$. (d) (Lista 4, ex 5.d) e^x é solução: $xe^x + (x-1)e^x = (2x-1)e^x$ verdadeiro. Redução de ordem: $y = Ce^x \Rightarrow y' = C'e^x + Ce^x \Rightarrow y'' = C''e^x + 2C'e^x + Ce^x \Rightarrow x(C''e^x + 2C'e^x + Ce^x) + (x-1).Ce^x = (2x-1)(C'e^x + Ce^x) \Rightarrow C''x + C'.1 + C.0 = 0 \Rightarrow z'x + z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|x| \Rightarrow z = x^{-1} \Rightarrow C = \int x^{-1}dx = \ln|x| \Rightarrow y_2 = e^x \ln|x|$. (Note que a equação é linear homogênea.)

(2) Escreva a equação de um sistema massa–mola horizontal com massa 2 kg, constante de amortecimento 1 Ns/m e constante elástica 3 N/m, submetido à força $3\cos(3t) - 2\,\mathrm{sen}(3t)$ em newtons. Argumente que a parte estacionária da solução independe das condições iniciais e determine-a. (3pts)

(Lista 4, ex. 15: também na versão U.) Equação do oscilador como $x(t)$:
$mx'' + bx' + kx = F(t) \Rightarrow 2x'' + 1x' + 3x = 3\cos(3t) - 2\,\mathrm{sen}(3t)$. (1pto)
Pol. característico: $2u^2 + u + 3 \Rightarrow$ raízes $\frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4} \Rightarrow$ parte real $-\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_h$ tem fator $e^{-t/4}$ e as constantes a determinar, mas $\lim_{t\to\infty} e^{-t/4} = 0$.
(ou seja, x_h é transiente, não importam as constantes) (1pto)
Então, a parte estacionária é x_p. Em $F(t)$, formamos $0 + 3i$ que não é raiz do polin. característico $\Rightarrow x_p = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t) \Rightarrow x_p' = -3A\,\mathrm{sen}(3t)$
$+ 3B\cos(3t) \Rightarrow x_p'' = -9A\cos(3t) - 9B\,\mathrm{sen}(3t) \Rightarrow$ na equação: $-18A\cos(3t)$
$-18B\,\mathrm{sen}(3t) - 3A\,\mathrm{sen}(3t) + 3B\cos(3t) + 3A\cos(3t) + 3B\,\mathrm{sen}(3t) = 3\cos(3t)$
$-2\,\mathrm{sen}(3t) \Rightarrow \cos(3t): -15A + 3B = 3$ e $\mathrm{sen}(3t): -3A - 15B = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$
e $B = \frac{1}{6} \Rightarrow x_p = -\frac{1}{6}\cos(3t) + \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}(3t)$. (1pto)

(4) Resolva o sistema $\begin{cases} x' = 1x - 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$ e classifique seu equilíbrio na origem. (3pts)

(Lista 5, ex. 8e) Na 1ª equação, $y = \frac{x - x'}{2} \Rightarrow y' = \frac{x' - x''}{2}$. Na 2ª equação,
$\frac{x' - x''}{2} = 3x - 2x + 2x' \Rightarrow x'' + 3x' + 2x = 0 \Rightarrow$ pol. $u^2 + 3u + 2 \Rightarrow$ raízes -2 e
-1 negativas $\Rightarrow$ equilíbrio nó atrator (1pto) $\Rightarrow x = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ (1pto)
$\Rightarrow y = \frac{x - x'}{2} = \frac{1}{2}\left(C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}\right) = \frac{3}{2} C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ (1pto)

Se começar por $y = D_1 e^{-2x} + D_2 e^{-x}$, então $x = \frac{2}{3} D_1 e^{-2x} + D_2 e^{-x}$.