Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2022 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão U – 23/08/2022

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y'' - 5y' + 6y = 0.$ $\qquad y(x) = \boxed{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$

(a) $y'' + 4y' + 3y = 0.$ $\qquad y(x) = \boxed{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \quad \text{(1pto)}}$

(b) $y'' - 6y' + 9y = 0.$ $\qquad y(x) = \boxed{C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad \text{(1pto)}}$

(c) $y'' - y' = -3.$
(não esqueça y_p) $\qquad y(x) = \boxed{D_1 + D_2 e^{x} + 3(x+1)}$
ou só $3x$ absorvendo em D_1 (1pto)

(d) $xy'' + y = (1 + x)y'.$
(use $y_1 = e^x$) $\qquad y(x) = \boxed{C_1 e^{x} + C_2 (x+1) \quad \text{(1pto)}}$

(Sugestão: confira seus resultados por substituição!)

(a) (Lista 3, ex. 10c) Pol. característico $t^2+4t+3 \Rightarrow$ raízes -1 e -3. (b) (Lista 3, ex. 10b) Pol. característico $t^2-6t+9 \Rightarrow$ raiz 3 dupla. (c) (Lista 4, ex. 1d) Pol. característico $t^2-t \Rightarrow$ raízes 0 e 1 $\Rightarrow y_1 = 1$ e $y_2 = e^x$. Variação das constantes: $W = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \Rightarrow C_1 = -\int \frac{e^x \cdot (-3)}{1 \cdot e^x}\,dx = 3x$ e $C_2 = \int \frac{1 \cdot (-3)}{1 \cdot e^x}\,dx = 3e^{-x} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_p = 3x \cdot 1 + 3e^{-x} \cdot e^x = 3(x+1)$. (d) (Lista 4, ex. 5b) e^x é solução: $xe^x + e^x = (1+x)e^x$ verdadeiro. Redução de ordem: $y = Ce^x \Rightarrow y' = C'e^x + Ce^x \Rightarrow y'' = C''e^x + 2C'e^x + Ce^x \Rightarrow x(C''e^x + 2C'e^x + Ce^x) + Ce^x = (1+x)(C'e^x + Ce^x) \Rightarrow C''x + C'(x-1) + C \cdot 0 = 0 \Rightarrow z'x + z(x-1) = 0 \Rightarrow z'x = z(1-x) \Rightarrow \frac{dz}{z} = (x^{-1} - 1)\,dx \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| - x$
$\Rightarrow z = xe^{-x} \Rightarrow C = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow y_2 = (-xe^{-x} - e^{-x}) \cdot e^x = -x - 1$ (ou $x+1$ absorvendo -1 em C_2 na resposta). (Note que a equação é linear homogênea)

(2) Escreva a equação de um sistema massa–mola horizontal com massa 2 kg, constante de amortecimento 1 Ns/m e constante elástica 3 N/m, submetido à força $3\cos(3t) - 2\,\mathrm{sen}(3t)$ em newtons. Argumente que a parte estacionária da solução independe das condições iniciais e determine-a. (3pts)

(Lista 4, ex. 15: também na versão V.) Equação do oscilador como $x(t)$: $mx'' + bx' + kx = F(t) \Rightarrow 2x'' + 1x' + 3x = 3\cos(3t) - 2\,\mathrm{sen}(3t)$. (1 pto)

Pol. característico: $2u^2 + u + 3 \Rightarrow$ raízes $\frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4} \Rightarrow$ parte real $-\frac{1}{4} < 0$ $\Rightarrow x_h$ tem fator $e^{-t/4}$ e as constantes a determinar, mas $\lim_{t\to\infty} e^{-t/4} = 0$ (ou seja, x_h é transiente, não importam as constantes) (1 pto)

Então, a parte estacionária é x_p. Em $F(t)$, formamos $0 + 3i$ que não é raiz do pol. característico $\Rightarrow x_p = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t) \Rightarrow x_p' = -3A\cdot\mathrm{sen}(3t) + 3B\cos(3t) \Rightarrow x_p'' = -9A\cos(3t) - 9B\,\mathrm{sen}(3t) \Rightarrow$ na equação: $-18A\cos(3t) - 18B\,\mathrm{sen}(3t) - 3A\,\mathrm{sen}(3t) + 3B\cos(3t) + 3A\cos(3t) + 3B\,\mathrm{sen}(3t) = 3\cos(3t) - 2\,\mathrm{sen}(3t) \Rightarrow \cos(3t): -15A + 3B = 3$ e $\mathrm{sen}(3t): -3A - 15B = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$ e $B = \frac{1}{6} \Rightarrow x_p = -\frac{1}{6}\cos(3t) + \frac{1}{6}\mathrm{sen}(3t)$. (1 pto)

(4) Resolva o sistema $\begin{cases} x' = +2x + 2y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$ e classifique seu equilíbrio na origem. (3pts)

(Lista 5, ex. 8b) Na 1ª equação, $y = \frac{x'}{2} - x \Rightarrow y' = \frac{x''}{2} - x'$. Na 2ª equação, $\frac{x''}{2} - x' = -2x + x' - 2x \Rightarrow x'' - 4x' + 8x = 0 \Rightarrow$ pol. $u^2 - 4u + 8 \Rightarrow$ raízes $2 \pm 2i \Rightarrow$ equilíbrio espiral repulsor (parte real positiva) (1 pto) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_1 e^{2t}\cos 2t + C_2 e^{2t}\mathrm{sen}\, 2t$ (1 pto) $\Rightarrow y = \frac{x'}{2} - x = (\cancel{C_1 e^{2t}\cos 2t} + C_1 e^{2t}(-\mathrm{sen}\, 2t) + \cancel{C_2 e^{2t}\mathrm{sen}\, 2t} + C_2 e^{2t}\cos 2t) - \cancel{C_1 e^{2t}\cos 2t} - \cancel{C_2 e^{2t}\mathrm{sen}\, 2t}$ $= C_2 e^{2t}\cos 2t - C_1 e^{2t}\mathrm{sen}\, 2t$ (1 pto)

Se começar por $y = D_1 e^{2t}\cos 2t + D_2 e^{2t}\mathrm{sen}\, 2t$, então $x = -D_2 e^{2t}\cos 2t + D_1 e^{2t}\mathrm{sen}\, 2t$.