Introdução às EDO – BCN 0405
2° quad. 2022 – Diurno – São Bernardo do Campo
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão Y – 15/07/2022

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva as equações, apresentando apenas as soluções finais. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y' = -5y$. $\quad y(x) = \boxed{Ce^{-5x}}$

(a) $2y' + y = 3x$. $\quad y(x) = \boxed{3x - 6 + De^{-x/2}}$ (1 pto)

(b) $y' = 2y + e^{2x}$. $\quad y(x) = \boxed{xe^{2x} + De^{2x}}$ (1 pto)

(c) $(y^5 - 1)y' = -xe^{x^2}$. $\quad y(x) = \boxed{\frac{y^6}{6} - y = -\frac{e^{x^2}}{2} + C}$ (1 pto)

(deixe a solução implícita)

(d) $y' = 6y\ln(2/y)$. $\quad y(x) = \boxed{2\exp(De^{-6x})}$ (1 pto)

(use $y = 2e^{-z}$)

(Sugestão: confira seus resultados por substituição ou derivação implícita!)

(a) (Lista 1, ex. 6h.) Equação linear: parte homogênea $2y' + y = 0 \Rightarrow 2\frac{dy}{y} = -dx$
$\Rightarrow 2\ln|y| = -x + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-x/2}$; variação da constante $2C'e^{-x/2} + 2Ce^{-x/2}(-1/2) +$
$+ Ce^{-x/2} = 3x \Rightarrow C' = \frac{3}{2}xe^{x/2} \Rightarrow C = 3xe^{x/2} - 6e^{x/2} + D$.

(b) (Lista 1, ex. 7e) Equação linear: parte homogênea $y' = 2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C_1$
$\Rightarrow y = Ce^{2x}$; variação da constante $C'e^{2x} + 2Ce^{2x} = 2Ce^{2x} + e^{2x} \Rightarrow C' = 1 \Rightarrow C = x + D$.

(c) (Lista 1, ex. 5f.) Variáveis separáveis: $(y^5 - 1)\,dy = -xe^{x^2}dx \Rightarrow y^6/6 - y = -e^{x^2}/2 + C$.

(d) (Também na versão X. Lista 2, ex. 8b.) Pela substituição: $y = 2e^{-z} \Rightarrow y' = -2e^{-z}.z'$
$\Rightarrow -2e^{-z}.z' = 6.2e^{-z}.\ln(2/2e^{-z}) \Rightarrow z' = -6z \Rightarrow \frac{dz}{z} = -6dx \Rightarrow \ln|z| = -6x + C_1 \Rightarrow z = Ce^{-6x}$.

(2) Suponha que a velocidade de leitura de um livro seja proporcional à quantidade restante de páginas a ler. Determine a quantidade lida em função do tempo, partindo do início do livro no instante zero. (2pts)

(Também na versão X. Compare com a lista 2, ex 3a.)

Sendo $Q(t)$ a quantidade lida, M o total e α a constante de proporção, temos: $Q' = \alpha(M-Q)$, $Q(0)=0$. (1 pto)

Resolução: $\frac{dQ}{M-Q} = \alpha\, dt \Rightarrow -\ln|M-Q| = \alpha t + C_1 \Rightarrow \ln|M-Q| = C_2 - \alpha t$ $\Rightarrow M-Q = Ce^{-\alpha t} \Rightarrow Q = M + De^{-\alpha t}$. Condição inicial: $Q(0)=0 \Rightarrow 0 = M + De^{0} \Rightarrow D = -M \Rightarrow Q = M - Me^{-\alpha t}$. (1 pto)

(3) Determine e classifique os equilíbrios de $y' = y^2(1-y)^2$, sem a resolver. (2pts)

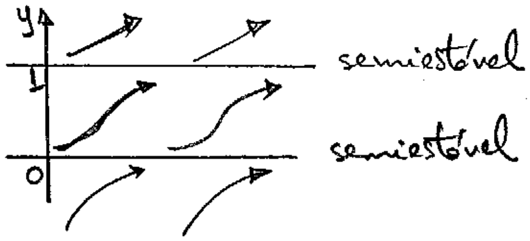
(Lista 2, ex. 9 g.)

Equilíbrios: $y'=0 \Rightarrow y^2(1-y)^2 = 0 \Rightarrow y=0,\ y=1$. (1 pto)

Classificação:

$y^2 \geq 0,\ (1-y)^2 \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0$ $\Longrightarrow$

(ou varal)



(1 pto)

(4) Mostre que as soluções estritamente positivas de $y' = e^{-y} - 1$ são decrescentes e não têm inflexão (não "mudam de concavidade"), sem resolver a equação. (2pts)

(Lista 2, ex. 9c.) Note que $y>0 \Rightarrow -y<0 \Rightarrow e^{-y} < 1$.

I) $y' = e^{-y} - 1 < 1 - 1 = 0 \Rightarrow y$ é decrescente. (1 pto)

II) $y'' = [y']' = [e^{-y}-1]' = -e^{-y}\cdot y' = -e^{-y}(e^{-y}-1) > 0 \Rightarrow y$ é convexa (concavidade sempre para cima). (1 pto)