Bases Matemáticas – BIS 0003
2º quad. 2019 – Noturno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – 16/07/2019

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Verifique se cada afirmação de (a) até (t), a seguir, é verdadeira ou falsa e assinale o quadradinho correspondente. (4pts.)

(0,2 pto. cada)

	Verdadeiro	Falso
(a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ x < y$. (dado x, tome $y = x+1$)	☑	☐
(b) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\ x < y$. (tome $y=0$)	☐	☑
(c) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ x < y$. (tome $x=5$ e $y=9$)	☑	☐
(d) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\ x < y$. (tome $x=9$ e $y=5$)	☐	☑
(e) $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\ 2x - y = 0$. (mesmo y para todo x)	☐	☑
(f) 5 é primo e 4 é ímpar. (a 2ª prop. é falsa)	☐	☑
(g) 5 é primo ou 4 é ímpar. (a 1ª prop. é verdadeira)	☑	☐
(h) Todo número inteiro tem raiz quadrada inteira. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$)	☐	☑
(i) $\sqrt{3-x} = x - 3$ tem duas soluções reais. $3-x = (x-3)^2 = x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ dá $x-3<0$ ⊗ e $x=3$ dá $0=0$ ☺	☐	☑
(j) $(\nexists x \in \mathbb{R})\ \|x+1\| + \|x-2\| = 1$. $x \leq -1 \Rightarrow (-x-1)+(-x+2)=1 \Rightarrow x=0$ ⊗; $x \geq 2 \Rightarrow x+1+x-2=1 \Rightarrow x=1$ ⊗; $-1 \leq x < 2 \Rightarrow x+1+(-x+2)=1 \Rightarrow 3=2$ ⊗	☑	☐
(k) $3\log x - \frac{1}{2}\log z \equiv \log(3x/2z)$. ($3\log x - \frac{1}{2}\log z = \log x^3 - \log z^{1/2} = \log(x^3/\sqrt{z})$)	☐	☑
(l) $\operatorname{arcsen}\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. ($0 \leq 2x \leq \pi \Rightarrow -\pi/2 \leq \pi/2 - 2x \leq \pi/2$)	☐	☑
(m) $\operatorname{arcsen}\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2x$ para $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. ($\pi \leq 2x \leq 3\pi \Rightarrow -\pi/2 \leq 2x - 3\pi/2 \leq \pi/2$ ou $-\pi/2 \leq 5\pi/2 - 2x \leq \pi/2$)	☐	☑
(n) A imagem de $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = (-1)^n n + (-1)^{n+1}(n+1)$, é $\{-1, 0, 1\}$. $g(n) = (-1)^n n + (-1).(-1)^n n + (-1)^{n+1}.1 = (-1)^{n+1}$ pode ser 1 (n ímpar) ou -1 (n par), não zero	☐	☑
(o) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$, é bijetora. (não é sobrejetora: $\nexists n \in \mathbb{N}\ f(n)=5$)	☐	☑
(p) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - \|n\|$, é injetora. ($f(5) = 0 = f(6)$)	☐	☑
(q) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - \|n\|$, é sobrejetora. ($\nexists n \in \mathbb{Z}\ f(n)=3$) $n \geq 0 \Rightarrow f(n) = n-n=0$; $n<0 \Rightarrow f(n) = n-(-n) = 2n$ par	☐	☑
(r) Se p, q são números racionais, então $p + q$ é um número racional. ($\mathbb{Q}$ é corpo, ou ainda, soma de frações é fração.)	☑	☐
(s) Se $a < b$ são reais, então $1/b < 1/a$. ($-2 < 5$, mas $1/5 > -1/2$)	☐	☑
(t) O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação. (se $\forall x\ 1'x = x$ então $1' = 1'.1 = 1$)	☑	☐

canceladas por gabarito 0,4 pto bônus

Nas listas: a) 2016-1, ex.2a, b) 2016-1, ex.2d, c) 2016-1, ex.2e, d) 2016-1, ex.2f, e) 2016-1, ex.3b, f) 2017-2, ex.1a, g) 2017-2, ex.1b, h) 2017-2, ex.30, i) 2017-1, ex.5c, j) 2016-5, ex.14e, k) 2016-8, ex.12b, l)* 2016-8, ex.17c, m)* 2016-8, ex.17d, n) 2016-6, ex7, o) 2016-6, ex.5c, p) 2016-6, ex.5d, q) 2016-6, ex.5d (2º), r) 2017-2, ex.33, s) 2017-5, ex.1f, t) 2016-4, ex.2b.

(2) Demonstre: (3pts)

(a) $(1-1/2)(1-1/3)\cdots(1-1/n) = 1/n$ para todo natural $n \geq 2$.

(Lista 2016-3, ex. 4c) (Esclarecemos o produto durante a prova.)

Base: $n=2 \Rightarrow 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ verdadeiro. (0,5pto)

Passo: Assuma $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$. Queremos $\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n+1}$. Calculamos

$$\underbrace{(1-1/2)(1-1/3)\cdots(1-1/n)}_{\prod_{k=2}^{n}(1-1/k)}(1-1/n+1) = \frac{1}{n}\cdot\left(1-1/n+1\right) = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{(n+1)-1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(1pto)

(b) $2^{2n}-1$ é divisível por 3 para todo natural $n \geq 1$.

(Lista 2017-4, ex. 7)

Base: $n=1 \Rightarrow 2^{2\cdot 1}-1 = 4-1=3$ é divisível por 3. (0,5pto)

Passo: Assuma $2^{2n}-1$ divisível por 3. Queremos $2^{2(n+1)}-1$ divisível por 3. Calculamos: $2^{2n+2}-1 = 4.2^{2n}-4+4-1 = 4(2^{2n}-1)+3$, ambos os termos divisíveis por 3. (1pto)

(Também $4.2^{2n}-1 = 3.2^{2n}+(2^{2n}-1)$ etc.)

(3) Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \sqrt{x}$, determine para cada $f, g, f \circ g, f \circ f, g \circ f$ e $g \circ g$ seu maior domínio real e sua expressão em termos de x. (3pts)

(Lista 2016-7, ex. 9d)

$f(x) = \operatorname{sen} x$ está definida para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$. (0,5pto)

$g(x) = \sqrt{x}$ está definida para $x \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{Dom}(g) = [0, \infty[$. (0,5pto)

$(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ está definida para $x \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{Dom}(f \circ g) = [0, \infty[$. (0,5pto)

$(f \circ f)(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$. (0,5pto)

$(g \circ f)(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ requer $\operatorname{sen} x \geqslant 0$, ou seja, x no 1º ou 2º quadrantes

$\Rightarrow \operatorname{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \exists n \in \mathbb{Z} \quad 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n + \pi\}$ (0,5pto)

$(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ requer $x \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{Dom}(g \circ g) = [0, \infty[$. (0,5pto)