Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2018 – Noturno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Prova Substitutiva – 14/05/2018

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Seja $z = f(x-y, y-x)$ com f diferenciável. Mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. (2pts)

Escreva $z = f(u,v)$ com $u = x-y$ e $v = y-x$. Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-1) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1,$$ cuja soma é 0.

(Lista 3, ex. 15)

(1pto) Regra da Cadeia

(1pto) $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$ simbólicos.

(2) Determine a derivada direcional máxima de $f(x,y,z) = \sqrt{xy^2z^3}$ em (2,2,2) e a direção em que isso ocorre. (2pts)

(Lista 4, ex. 56)

A direção de maior crescimento é a do gradiente. $\nabla f = \left(\frac{y^2z^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}, \frac{2xyz^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}, \frac{3xyz^2}{2\sqrt{xy^2z^3}}\right) \Rightarrow \nabla f(2,2,2) = \frac{1}{2\sqrt{64}}(32, 64, 96) = (2,4,6)$. (1pto)

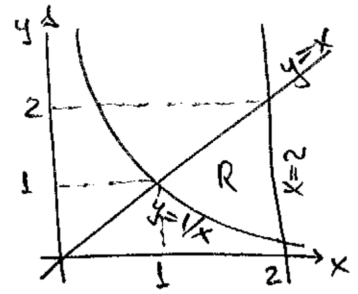
Para calcular a derivada direcional, normalizamos o vetor: $u = \frac{\nabla f(2,2,2)}{\|\nabla f(2,2,2)\|}$

$\Rightarrow u = \frac{(2,4,6)}{\sqrt{56}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(2,2,2) = \langle \nabla f(2,2,2) \mid u \rangle = \left\langle (2,4,6) \mid \frac{(2,4,6)}{\sqrt{56}} \right\rangle =$

$= \frac{56}{\sqrt{56}} = \sqrt{56}$. (1pto)

(3) Calcule $\int_R \frac{x^2}{y^2}\,d(x,y)$, onde R é a região delimitada por $y = x$, $y = 1/x$ e $x = 2$, nas duas ordens possíveis ($dy\,dx$ e $dx\,dy$). (3pts)

(Lista 6, ex 6 + mudança de ordem)



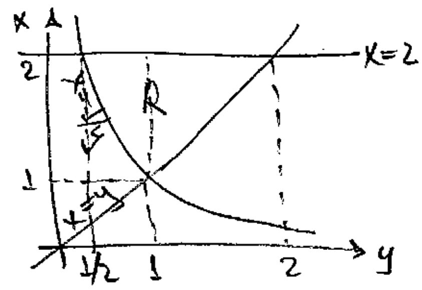
$$\int_R x^2y^{-2}\,d(x,y) = \int_1^2\int_{1/x}^{x} x^2 y^{-2}\,dy\,dx =$$

$$= \int_1^2 x^2\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{y=1/x}^{y=x} dx = \int_1^2 x^2\left(-x^{-1}+x\right)dx =$$

$$= \int_1^2 (x^3-x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = (4-2)-\left(\frac14-\frac12\right) =$$

$$= 2+\frac14 = \frac94 .$$ (1 pto)

Invertendo o plano (1 pto):



$$\int_R x^2y^{-2}\,d(x,y) = \int_{1/2}^{1}\int_{1/y}^{2} x^2y^{-2}\,dx\,dy +$$

$$+ \int_1^2\int_y^2 x^2y^{-2}\,dx\,dy$$ (1 pto: montagem)

$$= \int_{1/2}^{1} y^{-2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1/y}^{x=2} dy + \int_1^2 y^{-2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y}^{x=2} dy =$$

$$= \int_{1/2}^{1} y^{-2}\left(\frac83-\frac{y^{-3}}{3}\right)dy + \int_1^2 y^{-2}\left(\frac83-\frac{y^3}{3}\right)dy = \frac13\left(\int_{1/2}^{1}\left(8y^{-2}-y^{-5}\right)dy + \int_1^2\left(8y^{-2}-y\right)dy\right)$$

$$= \frac13\left(\left[\frac{8y^{-1}}{-1}-\frac{y^{-4}}{-4}\right]_{y=1/2}^{y=1} + \left[\frac{8y^{-1}}{-1}-\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2}\right) = \frac13\left(\left(-8+\frac14\right)-\left(-16+4\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-4-2\right)-\left(-8-\frac12\right)\right) = \frac13\left(6+\frac34\right) = \frac94 .$$

(4) Determine a equação do plano que passa pelo ponto (1,2,1) e determina com os planos coordenados um tetraedro de volume máximo. Não é preciso justificar o caráter do extremo. (Sugestão: determine a, b, c em $ax + by + cz = 6$.) (3pts)

(Lista 5, ex. 8)

Aplicar Lagrange. Pela sugestão, $g(a,b,c) = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 6$, donde $\nabla g = (1,2,1)$. Esse plano intersecta Ox $(y=z=0)$ em $\frac{6}{a}$, Oy $(x=z=0)$ em $\frac{6}{b}$ e Oz $(x=y=0)$ em $\frac{6}{c}$, de modo que o tetraedro tem volume $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{6}{b}\right) \cdot \frac{6}{c} = \frac{36}{abc}$, logo, $f(a,b,c) = \frac{36}{abc}$.

Então $\nabla f = \left(\frac{-36}{a^2bc}, \frac{-36}{ab^2c}, -\frac{36}{abc^2}\right)$. (1pto)

Formamos o sistema (1pto)

$$\begin{cases} \frac{-36}{a^2bc} = \lambda \cdot 1 \\ \frac{-36}{ab^2c} = \lambda \cdot 2 \\ \frac{-36}{abc^2} = \lambda \cdot 1 \\ a1 + b2 + c1 = 6 \end{cases}$$

(Note que $a, b, c \neq 0$ e, pelas equações, $\lambda \neq 0$)

Então $\frac{-36}{a^2bc} = \frac{-18}{ab^2c} = \frac{-36}{abc^2}$ (por λ) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{2}{c} \Rightarrow a = 2b = c$

$\Rightarrow (2b) + b.2 + (2b) = 6 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = c = 2$

e $\lambda = -9/2 \Rightarrow 2x + 1y + 2z = 6$ (1pto)

Obs: Também pode operar sem sugestão, com $ax + by + cz + d = 0$ (incógnitas a, b, c, d). Nesse caso, há infinitos valores possíveis para λ e bastará escolher um deles, porque a equação do plano pode ser multiplicada por um fator qualquer.