Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2018 – Noturno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão N – 11/05/2018

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	——

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Determine e classifique os pontos críticos da função abaixo relacionada. Outra função está resolvida como exemplo. (2pts)

Exemplo: $f(x,y) = x(y-1)$.

O ponto $\boxed{(0,1)}$ é $\boxed{\text{sela}}$.

Resolva: $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$. (Lista 5, ex. 1c)

O ponto $\boxed{(-1,0)}$ é $\boxed{\text{sela}}$;
(0,5 pto) (0,5 pto)

o ponto $\boxed{(2,0)}$ é $\boxed{\text{mínimo (local)}}$.
(0,5 pto) (0,5 pto)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{pontos } (-1,0) \text{ e } (2,0)$$

$$H_f = \begin{vmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \partial^2 f/\partial y \partial x & \partial^2 f/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24x - 12 \Rightarrow \begin{cases} H_f(-1,0) = -36 < 0 \Rightarrow \text{sela} \\ H_f(2,0) = 36 > 0 \text{ com } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) = 18 > 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ponto de mínimo local.

(2) Suponha que a temperatura em um ponto (x,y) de uma placa de metal seja $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Quais são a maior e a menor temperaturas encontradas pela formiga? (2pts) (Lista 5, ex. 9)

máx = $\boxed{125}$ mín = $\boxed{0}$
(1 pto) (1 pto)

Aplicar Lagrange a $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ com $g(x,y) = x^2 + y^2 = 5^2$. Temos $\nabla f = (8x - 4y, -4x + 2y)$ e $\nabla g = (2x, 2y)$ que não se anula (na restrição). Então:

$$\begin{cases} 8x - 4y = \lambda . 2x \\ -4x + 2y = \lambda . 2y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

De (1ª)+2x(2ª) vem $\lambda 2x + \lambda . 4y = 0$, donde $\lambda = 0$ ou $x = -2y$. Mas se $\lambda = 0$ então da (1ª) vem $y = 2x$. Assim: (a) $\lambda = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ pontos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ e $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$; (b) $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow 4y^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ pontos $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $\lambda = \frac{-4x+2y}{2y} = 5$. Comparamos f (ou T) para os quatro pontos:
$T(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 0$; $T(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 0$; $T(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 125$; $T(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = 125$.

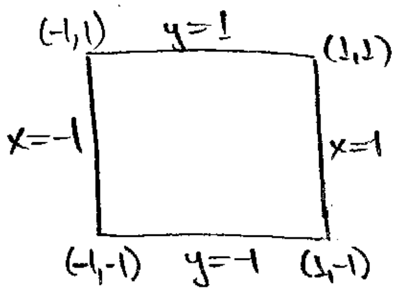
(3) Encontre o máximo e o mínimo globais da função $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$ na região quadrada com vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$. (3pts)

(Lista 5, ex. 2c)

Pontos críticos: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2+y}(2x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2+y}(2y+1) = 0 \Leftrightarrow y = -1/2 \end{cases} \Rightarrow$ ponto $(0,-\frac{1}{2})$

(pertence à região). (1pto)

Pontos de fronteira:



a) $y=1 \Rightarrow f(x,1) = e^{x^2+2}$ para $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ obtimos nas extremidades do intervalo e no ponto crítico $(e^{x^2+2})' = e^{x^2+2}(2x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ pontos $(-1,1)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

b) $y=-1$ análogo com $f(x,-1) = e^{x^2} \Rightarrow$ pontos $(-1,-1)$, $(1,-1)$ e $(0,-1)$.

c) $x=1 \Rightarrow f(1,y) = e^{1+y^2+y}$ para $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow$ obtimos nas extremidades do intervalo e no ponto crítico $(e^{1+y^2+y})' = e^{1+y^2+y}.(2y+1) = 0 \Leftrightarrow$
$y=-1/2 \Rightarrow$ pontos $(1,1)$, $(1,-1)$ e $(1,-1/2)$.

d) $x=-1$ análogo com $f(-1,y) = e^{1+y^2+y} \Rightarrow$ pontos $(-1,1)$, $(-1,-1)$ e $(-1,-1/2)$.

(1pto)

Comparação dos valores. (1pto)

ponto	f-valor	
$(0,-1/2)$	$e^{-1/4}$	$\longrightarrow$ mínimo
$(-1,1)$	e^3	máximo
$(1,-1)$	e^1	
$(-1,-1)$	e^1	
$(1,1)$	e^3	máximo
$(0,1)$	e^2	
$(0,-1)$	e^0	
$(1,-1/2)$	$e^{3/4}$	
$(-1,-1/2)$	$e^{3/4}$	

(4) Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, da função $x + y + z$ sujeita ao vínculo $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$, por meio de multiplicador de Lagrange. (3pts)

(Lista 5, ex. 6d)

Temos: $f(x,y,z) = x+y+z \Rightarrow \nabla f = (1,1,1)$;

$g(x,y,z) = x^2+4y^2+9z^2 = 36 \Rightarrow \nabla g = (2x, 8y, 18z)$ só se anula em $(0,0,0)$ que não satisfaz a restrição.

Então: $\begin{cases} 1 = \lambda\, 2x \\ 1 = \lambda . 8y \\ 1 = \lambda . 18z \\ x^2+4y^2+9z^2 = 36 \end{cases}$ (1pto)

Das três primeiras equações, vemos que $x, y, z, \lambda \neq 0$. e que $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{8\lambda}$ e $z = \frac{1}{18\lambda}$. Na última equação: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{4}{64\lambda^2} + \frac{9}{324\lambda^2} = 36$

$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{16\lambda^2} + \frac{1}{36\lambda^2} = 36 \Rightarrow \frac{36+9+4}{144\lambda^2} = 36 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{7}{72}$.

Obtemos os pontos $\underbrace{\left(\frac{36}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right) \text{ e } \left(-\frac{36}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)}_{(1pto)}$ e comparamos seus f-valores.

ponto	f-valor
$\frac{1}{7}(36,9,4)$	$7 \Rightarrow$ máximo
$-\frac{1}{7}(36,9,4)$	$-7 \Rightarrow$ mínimo

(1pto)