Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1º quad. 2018 – Noturno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão M – 11/05/2018

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Determine e classifique os pontos críticos da função abaixo relacionada. Outra função está resolvida como exemplo. (2pts)

Exemplo: $f(x,y) = x(y-1)$.

O ponto $\boxed{(0,1)}$ é $\boxed{\text{sela}}$.

Resolva: $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$. (Lista 5, ex. 1-b)

O ponto $\boxed{(0,0)}$ é $\boxed{\text{sela}}$;
(0,5pts) (0,5pts)

o ponto $\boxed{(-1,-1)}$ é $\boxed{\text{máximo (local)}}$.
(0,5pts) (0,5pts)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+3y=0 \Leftrightarrow y=-x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+3x=0 \Leftrightarrow x=-y^2 \end{cases} \Rightarrow x=-x^4 \Rightarrow x=0 \text{ (donde } y=0) \text{ ou } x=-1 \text{ (donde } y=-1) \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ pontos $(0,0)$ e $(-1,-1)$.

$$H_f = \begin{vmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \partial^2 f/\partial y \partial x & \partial^2 f/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9 \Rightarrow \begin{cases} H_f(0,0) = -9 < 0 \Rightarrow \text{sela} \\ H_f(-1,-1) = 27 > 0 \text{ com } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow$ ponto de máximo local.

(2) Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha 8.000 m^3 de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio R e altura h da parte cilíndrica você recomendaria para o tanque, em metros? (2pts) (Lista 5, ex 3)

$R = \boxed{10\sqrt[3]{6/\pi}}$ $h = \boxed{0}$
(1pto) (1pto)

Aplicar Lagrange a $f(R,h) = 4\pi R^2 + 2\pi R h$ com $g(R,h) = 4\pi R^3/3 + \pi R^2 h = 8000$.
Temos $\nabla f = (8\pi R + 2\pi h, 2\pi R)$ e $\nabla g = (4\pi R^2 + 2\pi R h, \pi R^2)$ que não se anula (na restrição). Então:

$$\begin{cases} 8\pi R + 2\pi h = \lambda(4\pi R^2 + 2\pi R h) \\ 2\pi R = \lambda \cdot \pi R^2 \\ 4\pi R^3/3 + \pi R^2 h = 8000 \end{cases}$$

Da 2ª eq, $\lambda = \frac{2}{R}$ ($R \neq 0$ por causa do volume), substituindo na 1ª vem: $8R + 2h = 8R + 4h$, donde $h = 0$.

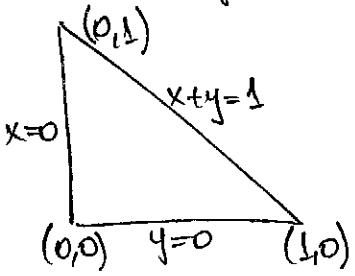
Da 3ª eq, $4\pi R^3/3 = 8000 \Rightarrow R^3 = \frac{6000}{\pi} \Rightarrow R = 10\sqrt[3]{6/\pi}$.

(3) Encontre o máximo e o mínimo globais da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na região triangular com vértices (0,0), (0,1) e (1,0). (3pts)

(Lista 5, ex. 2b)

Pontos críticos: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = y^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x = 0$ (donde $y=0$) ou $x = 1$ (donde $y = 1$) $\Rightarrow$ pontos $(0,0)$ (pertence à região) e $(1,1)$ (não pertence à região). (1pto)

Pontos de fronteira:



a) $x=0 \Rightarrow f(0,y) = y^3$ para $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow$ ótimos nos extremidades do intervalo $\Rightarrow$ pontos $(0,0)$ e $(0,1)$.

b) $y = 0 \Rightarrow f(x,0) = x^3$ para $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ ótimos nos extremidades do intervalo $\Rightarrow$ pontos $(0,0)$ e $(1,0)$.

c) $x + y = 1 \Rightarrow f(x, 1-x) = x^3 + (1-x)^3 - 3x(1-x) = x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3x + 3x^2 = 6x^2 - 6x + 1$ para $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ ótimos nos extremidades do intervalo e no ponto crítico $(6x^2 - 6x + 1)' = 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (donde $y = \frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ pontos $(0,1)$, $(1,0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (1pto)

Comparação dos valores (1pto)

ponto	f-valor	
(0,0)	0	
(1,0)	1	máximo
(0,1)	1	máximo
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$-1/2$	$\Rightarrow$ mínimo

(4) Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, da função $x^2 - y^2$ sujeita ao vínculo $x^2 + y^2 = 4$, por meio de multiplicador de Lagrange. (3pts)

(Lista 5, ex. 6a)

Temos: $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, -2y)$;

$g(x,y) = x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \nabla g = (2x, 2y)$ só se anula em $(0,0)$ que não satisfaz a restrição.

Então: $\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ -2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (1 pto)

Dividimos em casos:

* $\lambda = 0 \Rightarrow x = y = 0$ (da 1ª e 2ª eq.) $\Rightarrow$ não verifica 3ª equação.
* $\lambda \neq 0 \Rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\lambda = 1$ (da 1ª eq.)
  * $x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$ (da 3ª eq.) $\Rightarrow \lambda = -1$ (da 2ª eq.)
  * $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow y = 0$ (da 2ª eq.) $\Rightarrow x = \pm 2$ (da 3ª eq.)

Obtemos os pontos $\underbrace{(0,2), (0,-2), (2,0) \text{ e } (-2,0)}_{(1\,\text{pto})}$ e comparamos seus f-valores:

ponto	f-valor	
(0,2)	-4	mínimo
(0,-2)	-4	mínimo
(2,0)	4	máximo
(-2,0)	4	máximo

(1 pto)