Funções de Várias Variáveis – BCN 0407
1° quad. 2018 – Noturno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Primeira Prova – Versão P – 27/03/2018

Nome	**RA**
Resolução e pontuação	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta azul ou preta.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use caneta azul ou preta para responder as questões. Não use lápis.
- Não rasure e não use borracha, corretivo ou "branquinho". Se errar, risque e escreva a versão nova em sequência.
- Nada fora dos quadros de resposta ou em folha avulsa será considerado na correção. Cada quadro deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas deste caderno ou solicite folhas avulsas e devolva-as ao final da prova. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente caneta azul ou preta e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **4** (quatro) folhas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva cada item, apresentando apenas as soluções finais. O primeiro item está resolvido como exemplo. (4pts)

Ex.: Determine a derivada parcial de $x^2y - 3x^y$ com respeito a x.

$$\boxed{2xy - 3yx^{y-1}}$$

(a) Determine $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x \operatorname{sen} y}{\cos(x^2+y^2)}\right)$.

$$\boxed{\frac{1\operatorname{sen} y \cos(x^2+y^2) - x \operatorname{sen} y\,(-\operatorname{sen}(x^2+y^2)).2x}{\cos^2(x^2+y^2)}}$$ (1 pto)

(b) Sejam $f(x,y) = x^2y^2 - x + 2y$, $x = \sqrt{s}$ e $y = st^3$. Determine $\frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{(1,-2)}_{(s,t)}$.

$$\boxed{-168}$$ (1 pto) (note $\frac{\partial f}{\partial t}$ ←)

(c) Suponha que $f(x,y)$ é diferenciável em $(1,2)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -5$ para $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 10$ para $v = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$.

$$\boxed{5}$$ (1 pto)

(d) Determine o determinante jacobiano da transformação $\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = u^2 + v^2. \end{cases}$

$$\boxed{8uv}$$ (1 pto)

(a) (Lista 3, ex. 1f)

(b) (Lista 3, ex. 12) $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (2xy^2 - 1).0 + (x^2 2y + 2).s\,3t^2 =$
$= (\sqrt{s}^2 \cdot 2st^3 + 2).s\,3t^2 = (2s^2t^3+2)s.3t^2\Big|_{\substack{s=1\\t=-2}} = (2.1.(-8)+2).1.3.4 = -168$

(c) (Lista 4, ex. 6a) Sejam $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$. Então $\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = \langle(\alpha,\beta)|u\rangle$
$\Rightarrow \frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta = -5$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle(\alpha,\beta)|v\rangle \Rightarrow \frac{4}{5}\alpha - \frac{3}{5}\beta = 10$. Isole $\alpha = 5$ e $\beta = -10$.

(d) (Lista 7, ex. 8a) $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 2u.2v - (2u)(-2v) = 8uv.$

(2) Determine $\int_D xy\, d(x,y)$ em que D é definido pela propriedade $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1$. (3pts)

(Lista 6, ex. 7e)

D é uma elipse centrada na origem. Mudança de coordenadas:

$$\Phi: \begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{para } 0<r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi$$

(1 pto)

Jacobiano: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 3\,\mathrm{sen}\,\theta & 3r\cos\theta \end{vmatrix} = 6r\cos^2\theta - (-6r\,\mathrm{sen}^2\theta) = 6r$

(1 pto)

Integral: $\int_D xy\, d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \underbrace{(2r\cos\theta)}_{x}\cdot\underbrace{(3r\,\mathrm{sen}\,\theta)}_{y}\cdot\underbrace{6r}_{|J_\Phi|}\, dr\, d\theta =$

$= 36\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\mathrm{sen}\,\theta\int_0^1 r^3\, dr\, d\theta = 36\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{1}{4}\, d\theta =$

$= 9\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\cdot d(\mathrm{sen}\,\theta) = 9\left[\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$ (1 pto)

(Integral nula: note a simetria do domínio e do integrando.)

(3) Determine a melhor aproximação afim (linear) para a expressão $x^3 - y^3 - 6xy$ no ponto $(1; 2)$ e use-a para estimar seu valor em $(0{,}99; 2{,}01)$. (3pts)

(Lista 3, ex. 8b, exceto sinal de y^3)

Função $f(x,y) = x^3 - y^3 - 6xy$ no ponto $(a,b) = (1,2)$.

Melhor aproximação:

$$L(x,y) = f(a,b) + f'(a,b) \cdot \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} \qquad (1\text{pto})$$

$$= (1^3 - 2^3 - 6.1.2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right] \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} =$$

$$= -19 + \left[3x^2 - 6y \quad -3y^2 - 6x \right]_{\substack{x=a=1 \\ y=b=2}} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} =$$

$$= -19 + [-9 \quad -18] \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = -19 - 9(x-1) - 18(y-2)$$

$$= 26 - 9x - 18y \qquad (1\text{pto})$$

No ponto especificado: $L(0{,}99; 2{,}01) = -19 - 9(-0{,}01) - 18(0{,}01)$

$= -19 + 0{,}09 - 0{,}18 = -19{,}09.$ (1pto)