Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2017 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Prova Substitutiva – 18/08/2017

Nome	**RA**
Resolução e gabarito de correção	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta preta ou azul.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use lápis para responder as questões. Não é necessário nem recomendável passar respostas a caneta.
- Nada fora dos quadros de resposta será considerado na correção. Cada um deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente lápis, caneta, borracha e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) páginas, incluindo esta, e **4** (quatro) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Resolva $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$ pelo método da variação da constante. (3pts)

Parte homogênea: $xy' + 2y = 0 \Rightarrow x\,dy = -2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln|y| = -2\ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx^{-2}$ (1pto)

Substituindo com C variável: $x(Cx^{-2})' + 2Cx^{-2} = \operatorname{sen} x \Rightarrow x(C'x^{-2} + C(-2)x^{-3}) + 2Cx^{-2} = \operatorname{sen} x \Rightarrow C'x^{-1} - \cancel{2Cx^{-2}} + \cancel{2Cx^{-2}} = \operatorname{sen} x \Rightarrow C' = x \operatorname{sen} x$
(1pto) $\Rightarrow C = \int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + D \Rightarrow y = Cx^{-2} = -x^{-1}\cos x + x^{-2}\operatorname{sen} x + Dx^{-2}$ (1pto)

(Lista 1, ex. 8a)

(2) Um novo produto é introduzido no mercado através de uma campanha publicitária cujo alvo são os N habitantes de uma cidade. A taxa com que a população fica sabendo sobre o produto é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram falar sobre o produto. Supondo que no início da campanha ninguém conheça o produto e que, ao fim de dois anos, metade da população tenha ouvido falar sobre o produto, qual será a fração da população que terá ouvido falar sobre o produto ao fim de quatro anos? (2pts)

Do enunciado, $\frac{dx}{dt} = k(N-x)$ (onde x é o nº pessoas que conhecem o produto, em função do tempo t, e k é a cte. de proporção), $x(0)=0$, $x(2) = \frac{N}{2}$ e $x(4)$ é o pedido.

$\frac{dx}{N-x} = k\,dt \stackrel{\int}{\Rightarrow} -\ln|x-N| = kt + C_1 \Rightarrow x - N = Ce^{-kt} \Rightarrow x = N + Ce^{-kt}$ (1pto)

$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = N + Ce^{0} \Rightarrow C = -N \Rightarrow x = N - Ne^{-kt}$ e $x(2) = \frac{N}{2} \Rightarrow \frac{N}{2} = N - Ne^{-k2} \Rightarrow e^{-k.2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{2k} = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow x = N - Ne^{-t(\ln 2)/2}$.

Então $x(4) = N - Ne^{-4(\ln 2)/2} = N(1 - e^{-2\ln 2}) = N(1 - e^{\ln 2^{-2}}) = N(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3N}{4}$ (1pto)

(Lista 2, ex 6.)

(3) Verifique que $y_1 = x$ é solução de $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ e, usando o método da redução de ordem, encontre uma segunda solução dessa equação linearmente independente de y_1. (2pts)

$y_1 = x \Rightarrow y_1' = 1 \Rightarrow y_1'' = 0 \Rightarrow x^2y_1'' - x(x+2)y_1' + (x+2)y_1 = x^2 \cdot 0 - x(x+2)\cdot 1 + (x+2)\cdot x = 0$ ✓ (0,5pto)

$y = Cy_1 = Cx \Rightarrow y' = C'x + C \Rightarrow y'' = C''x + 2C'$ (1pto) $\Rightarrow x^2(C''x + 2C') - x(x+2)(C'x + C) + (x+2)Cx = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x^3C'' - C'x^3 = 0 \Rightarrow C'' = C'$

$\xrightarrow{C'=z} z' = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = dx \Rightarrow z = Ke^x \Rightarrow C = \int Ke^x\,dx = Ke^x + D$: tomamos $C = e^x \Rightarrow y = Cx = xe^x$ (0,5pto)

(Lista 3, ex. 16e)

(4) A uma mola de constante elástica 1 N/m é atada uma massa de 1 kg. A massa sofre ação de uma força externa de $3\cos(t)$ N. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio e com velocidade inicial nula, determine o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa, qual é sua solução e se ocorre ressonância e por quê. (3pts)

Oscilador harmônico massa-mola: $m\ddot{x} + kx = F(t) \Rightarrow 1\ddot{x} + 1x = 3\cos t$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (0,5pto)

A solução da parte homogênea é $x_h = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t$. A frequência é a mesma da força excitadora, então ocorre ressonância (1pto) e a solução particular é $x_p = At\cos t + Bt\operatorname{sen} t \Rightarrow \dot{x}_p = A\cos t - At\operatorname{sen} t + B\operatorname{sen} t + Bt\cos t \Rightarrow \ddot{x}_p = -2A\operatorname{sen} t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\operatorname{sen} t$. Substituindo na equação, vem $-2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t = 3\cos t \Rightarrow A = 0$ e $B = \frac{3}{2}$ (1pto).

$x = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + \frac{3}{2}t\operatorname{sen} t \xrightarrow{x(0)=0} 0 = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0 + 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_2\cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t + \frac{3}{2}t\cos t \xrightarrow{\dot{x}(0)=0} 0 = C_2\cdot 1 + 0 + 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}t\operatorname{sen} t$ (0,5pto)

(note termo ilimitado)

(Lista 4, ex. 14ae)