Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2017 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão V – 15/08/2017

Nome	**RA**
Resolução e gabarito de correção	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta preta ou azul.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use lápis para responder as questões. Não é necessário nem recomendável passar respostas a caneta.
- Nada fora dos quadros de resposta será considerado na correção. Cada um deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente lápis, caneta, borracha e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) páginas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Apresente apenas duas soluções básicas (ou seja, linearmente independentes) de cada equação. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y'' - 5y' + 6y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{2x}} \quad y_2 = \boxed{e^{3x}}$

(a) $y'' + 2y' - 3y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{x}} \quad y_2 = \boxed{e^{-3x}}$

(Lista 3, ex. 9c)

(b) $y'' + 2y' + y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{-x}} \quad y_2 = \boxed{xe^{-x}}$

(Lista 3, ex 9f)

(c) $y'' - 8y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{(2\sqrt{2})x}} \quad y_2 = \boxed{e^{-(2\sqrt{2})x}}$

(Lista 3, ex. 9h)

(d) $y'' - 2y' + 2y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{x}\cos x} \quad y_2 = \boxed{e^{x}\operatorname{sen} x}$

(Lista 3, ex. 9i)

(e) $9y'' + 6y' + y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{-x/3}} \quad y_2 = \boxed{xe^{-x/3}}$

(Lista 3, ex. 9k)

(f) $y'' + 6y' + 13y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{e^{-3x}\cos 2x} \quad y_2 = \boxed{e^{-3x}\operatorname{sen} 2x}$

(Lista 3, ex 9l)

(g) $x^2y'' + xy' + y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{\cos(\ln x)} \quad y_2 = \boxed{\operatorname{sen}(\ln x)}$

(Lista 3, ex. 14c1)

(h) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0.$ $\quad y_1 = \boxed{x^{-2}} \quad y_2 = \boxed{x^{-2}\ln x}$

(Lista 3, ex. 14c4)

(0,5pto cada item)

(2) Resolva o PVI $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (3pts)

Parte homogênea tem polinômio característico $u^2 - 2u - 3$ com raízes -1 e 3, donde $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ (1pto)

$R(x) = 3xe^{2x}$ corresponde a $2+0i$, que não é raiz desse polinômio, então a solução particular tem a forma $y = (Ax+B)e^{2x}$ com $y' = Ae^{2x} +$ $+ (Ax+B)\cdot 2e^{2x}$ e $y'' = 2Ae^{2x} + A\cdot 2e^{2x} + (Ax+B)\cdot 4e^{2x}$. Substituindo na equação e simplificando, vem $(2A-3B)e^{2x} - 3Axe^{2x} = 3xe^{2x}$, donde $2A - 3B = 0$ (coeficiente de e^{2x}) e $-3A = 3$ (coef. de xe^{2x}). Obtemos $A = -1$ e $B = -\frac{2}{3}$, donde $y_p = (-x - \frac{2}{3})e^{2x}$. (1pto)

Com $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + (-x - \frac{2}{3})e^{2x}$, a condição $y(0) = 1$ resulta em $C_1 + C_2 - \frac{2}{3} = 1$; a condição $y'(0) = 0$ resulta em $-C_1 + 3C_2 - 1 - \frac{4}{3} = 0$. Desse modo, $C_1 = \frac{2}{3}$ e $C_2 = 1$, donde $y = \frac{2}{3}e^{-x} + e^{3x} + (-x - \frac{2}{3})e^{2x}$ (1pto)

(Lista 4, ex. 2d)

(3) Resolva o sistema $\begin{cases} \dot{x} = x + 1y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$ e classifique seu equilíbrio na origem. (3pts)

Da 1ª equação, $y = \dot{x} - x$, donde $\dot{y} = \ddot{x} - \dot{x}$. Na 2ª equação, obtemos: $\ddot{x} - \dot{x} = x + 3\dot{x} - 3x \Rightarrow \ddot{x} - 4\dot{x} + 2x = 0 \Rightarrow x = C_1 e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})t}$. (1pto)

Substituímos tal x em $y = \dot{x} - x$, obtendo $y = C_1(2+\sqrt{2})e^{(2+\sqrt{2})t} +$ $+ C_2(2-\sqrt{2})e^{(2-\sqrt{2})t} - C_1 e^{(2+\sqrt{2})t} - C_2 e^{(2-\sqrt{2})t} = (1+\sqrt{2})C_1 e^{(2+\sqrt{2})t} +$ $+ (1-\sqrt{2})C_2 e^{(2-\sqrt{2})t}$. (1pto)

O sistema tem matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ com polinômio característico $\begin{vmatrix} 1-u & 1 \\ 1 & 3-u \end{vmatrix} =$ $= (1-u)(3-u) - 1 = u^2 - 4u + 2$ e autovalores $2 \pm \sqrt{2}$ (são as mesmas raízes acima). Note que ambos são positivos ($4 > 2 \Rightarrow 2 > \sqrt{2}$) e distintos, logo, é um nó repulsor ou instável. (1pto)

(Lista 5, ex. 8f) (Se isolar x, vem $y = C_1 e^{(2+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(2-\sqrt{2})t}$ e $x = C_1(\sqrt{2}-1)e^{(2+\sqrt{2})t} +$ $+ (-\sqrt{2}-1)C_2 e^{(2-\sqrt{2})t}$)