Introdução às EDO – BCN 0405
2º quad. 2017 – Diurno – Santo André
Prof. Vinicius Cifú Lopes

Segunda Prova – Versão U – 15/08/2017

Nome	**RA**
Resolução e gabarito de correção	———

Instruções:

- Esta prova tem duração de 1h 30min.
- Não se esqueça de escrever seus dados acima; use caneta preta ou azul.
- Somente vire esta folha e inicie a prova quando autorizado.
- Não remova ou substitua o grampo das folhas.
- Use lápis para responder as questões. Não é necessário nem recomendável passar respostas a caneta.
- Nada fora dos quadros de resposta será considerado na correção. Cada um deve conter todo o trabalho pedido referente a sua questão.
- Quando solicitado, indique apenas a resposta final dentro do quadro. Caso contrário, apresente raciocínio e dedução completos.
- Utilize somente os métodos requeridos nos enunciados e vistos em aula.
- Quando solicitado, realize a demonstração abstratamente e em geral, sem recurso a exemplos numéricos ou hipóteses adicionais.
- Apresente letra legível e redação organizada.
- Para rascunho, use somente os versos das folhas. Não utilize outro material.
- Não use tinta vermelha.
- Não é permitido consultar materiais, dispositivos ou pessoas.
- Nenhuma pergunta será respondida durante a prova.
- Sobre a mesa, tenha somente lápis, caneta, borracha e documento original e com foto. Arrume seus pertences sob a cadeira e fechados na bolsa.
- **Não cole, nem permita cópia!** Proteja seu trabalho.
- Esta prova contém **3** (três) páginas, incluindo esta, e **3** (três) questões. Verifique se este caderno está completo ao iniciar a prova.

Boa Prova!

(1) Apresente apenas duas soluções básicas (ou seja, linearmente independentes) de cada equação. A primeira equação está resolvida como exemplo. (4pts)

Ex.: $y'' - 5y' + 6y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{e^{2x}} \quad y_2 = \boxed{e^{3x}}$

(a) $4y'' + y' = 0$. $\quad y_1 = \boxed{1} \quad y_2 = \boxed{e^{-x/4}}$
(Lista 3, ex. 9a)

(b) $y'' + 16y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{\cos 4x} \quad y_2 = \boxed{\operatorname{sen} 4x}$
(Lista 3, ex. 9b)

(c) $2y'' - 3y' + y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{e^{x}} \quad y_2 = \boxed{e^{x/2}}$
(Lista 3, ex. 9d)

(d) $y'' - 4y' + 5y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{e^{2x}\cos x} \quad y_2 = \boxed{e^{2x}\operatorname{sen} x}$
(Lista 3, ex 9e)

(e) $y'' - y' - 6y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{e^{-2x}} \quad y_2 = \boxed{e^{3x}}$
(Lista 3, ex 9g)

(f) $y'' - 10y' + 25y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{e^{5x}} \quad y_2 = \boxed{xe^{5x}}$
(Lista 3, ex 9j)

(g) $x^2y'' + 3xy' + \frac{5}{4}y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{x^{-1}\cos\frac{\ln x}{2}} \quad y_2 = \boxed{x^{-1}\operatorname{sen}\frac{\ln x}{2}}$
(Lista 3, ex 14c2)

(h) $x^2y'' - 4xy' - 6y = 0$. $\quad y_1 = \boxed{x^{-1}} \quad y_2 = \boxed{x^{6}}$
(Lista 3, ex. 14c3)

(0,5 pto cada item)

(2) Resolva o PVI $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (3pts)

Parte homogênea tem polinômio característico u^2+4 com raízes $\pm 2i$, donde $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$ (1pto)

$R(x) = x^2 + 3e^x$: $\begin{cases} x^2e^0 \text{ corresponde a } 0+0i \\ e^x \text{ corresponde a } 1+0i \end{cases}$, que não são raízes desse polinômio, então a solução particular tem a forma $y = Ax^2+Bx+C+Ke^x$ (usamos superposição), com $y' = 2Ax+B+Ke^x$ e $y'' = 2A+Ke^x$. Substituindo na equação e simplificando, vem $4Ax^2+4Bx+(4C+2A)+5Ke^x = x^2+3e^x$, donde $4A=1$ (coef. de x^2), $4B=0$ (coef. x), $4C+2A=0$ (coef. cte.) e $5K=$ $=3$ (coef. e^x). Obtemos $A=\frac{1}{4}$, $B=0$, $C=-\frac{1}{8}$ e $K=\frac{3}{5}$, donde $y_p = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} +$ $+\frac{3}{5}e^x$. (1pto)

Com $y = C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$: $y(0)=0 \Rightarrow C_1 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow C_1 =$ $= -\frac{19}{40}$; $y'(0)=2 \Rightarrow 2C_2 + \frac{3}{5} = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{7}{10}$. Desse modo, $y = -\frac{19}{40}\cos 2x +$ $+\frac{7}{10}\operatorname{sen} 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$. (1pto)

(Lista 4, ex. 2b)

(3) Resolva o sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y \\ \dot{y} = -1x - 4y \end{cases}$ e classifique seu equilíbrio na origem. (3pts)

Da 2ª equação, $x = -4y - \dot{y}$, donde $\dot{x} = -4\dot{y} - \ddot{y}$. Na 1ª equação, obtemos: $-4\dot{y} - \ddot{y} = +8y + 2\dot{y} + 5y \Rightarrow \ddot{y} + 6\dot{y} + 13y = 0 \Rightarrow y = C_1e^{-3t}\cos 2t + C_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$. (1pto)

Substituímos tal y em $x = -4y - \dot{y}$, obtendo $x = -4C_1e^{-3t}\cos 2t - 4C_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$ $-(-3)C_1e^{-3t}\cos 2t - (-2)C_1e^{-3t}\operatorname{sen} 2t - (-3)C_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t - 2C_2e^{-3t}\cos 2t =$ $= (-C_1 - 2C_2)e^{-3t}\cos 2t + (2C_1 - C_2)e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$. (1pto)

O sistema tem matriz $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ com polinômio característico $\begin{vmatrix} -2-u & 5 \\ -1 & -4-u \end{vmatrix} =$ $= (-2-u)(-4-u) - (-1)\cdot 5 = u^2 + 6u + 13$ e autovalores $-3 \pm 2i$ (são as mesmas raízes acima). São complexos conjugados com parte real negativa, logo, é um foco espiral atrator ou estável. (1pto)

(Lista 5, ex. 8h) (Se isolar y, vem $x = C_1e^{-3t}\cos 2t + C_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$ e $y = \frac{-2C_1+2C_2}{5}e^{-3t}\cdot$ $\cdot\cos 2t + \frac{-2C_1-C_2}{5}e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$.)